Prof. Dr. J. Stöckler
PD Dr. Maria Charina-Kehrein

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

4. Übungsblatt zur Numerik II
SS 2010 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Aufgaben 11 und 13 ist Montag, 10.05.10, 12:15 Uhr.
Internetseite:
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2010/numII10.html`

Aufgabe 11 (3 Punkte)

(i) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle x, y\rangle_A = y^T A x = x_1y_1+3x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+3x_3y_3, \quad x = (x_1,x_2,x_3)^T, \quad y = (y_1,y_2,y_3)^T.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist, und geben Sie die induzierte Vektor–Norm $\|\cdot\|_A$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|_A$ äquivalent zur euklidischen Norm ist.

(c) Geben Sie die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ an, die die Gleichung $\|x\|_A^2 = 1$ erfüllen, und skizzieren Sie diese Menge.
(**Hinweis: Diagonalizieren Sie die Matrix** A.)

(ii) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A positiv definit. Zeigen Sie, dass $\|B\|_A < 1$ genau dann gilt, wenn die Matrix $A - B^TAB$ positiv definit ist.

Aufgabe 12

Die Kondition des Eigenwertproblems bei mehrfachen Eigenwerten unsymmetrischer Matrizen soll durch ein Beispiel veranschaulicht werden. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und A_ϵ die Matrix mit gestörtem Eintrag $a_{21} = \epsilon > 0$.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und A_ϵ.

(ii) Berechnen Sie die Eigenvektoren v_j, $j = 1, 2$, von A_ϵ mit $\|v_j\| = 1$, sowie die Konditionszahl der Matrix $S = (v_1, v_2)$.

Aufgabe 13 (3 Punkte)

(i) Bestimmen Sie eine Näherung an den betragsgrößten Eigenwert von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

indem Sie ausgehend von den Startvektoren $(1,0,1)^T$, $(1,1,0)^T$ und $(1,1,1)^T$ jeweils zwei Schritte des Verfahrens von von Mises durchführen.

(ii) Benutzen Sie den Satz 8.9, um die Konvergenz der Iterationen in (i) zu untersuchen.

Aufgabe 14 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

(i) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla R_A(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} R_A(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} R_A(x)\right)$ des Rayleigh–Quotienten $R_A(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$ von A an der Stelle $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $x \neq 0$ genau dann Eigenvektor von A ist, wenn $\nabla R_A(x) = 0$ gilt.

(iii) Begründen Sie die Existemz der folgenden Extrema und berechnen Sie diese.

(a) $\min\limits_{\|x\|_2=1} x^T Ax$,

(b) $\max\limits_{\|x\|_2=1} x^T Ax$.