

7. Übungsblatt zur Numerik II
SS 2010 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Aufgaben 23 und 24 ist Montag, 14.06.10, 12:15 Uhr.

Internetseite:

www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2010/numII10.html

Aufgabe 23 (2 Punkte) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Eigenwerte λ_i , $i = 1, 2, 3$, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des JACOBI-Verfahrens bestimmt. Das Verfahren soll solange ausgeführt werden, bis für die Außerdiagonalelemente $a_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, \dots, n$, $j \neq i$ gilt: $|a_{ij}^{(k)}| < 10^{-4}$.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Gegeben sei das Gebiet $G := (-1, 1) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{3}x^3y, \quad y(0) = 1.$$

a) Weisen Sie nach, daß der Operator $T : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$,

$$(Tg)(x) := 1 + \frac{1}{3} \int_0^x t^3 g(t) dt, \quad x \in [-1, 1], \quad g \in C[-1, 1],$$

eine kontrahierende Selbstabbildung des Banachraumes $C[-1, 1]$ mit der Maximumnorm liefert. Ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar auf $G = \mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Führen Sie, ausgehend von $y_0(x) \equiv 1$, zwei Schritte der Picard-Iteration zur Lösung des AWP's durch.

c) Geben Sie eine a posteriori-Fehlerabschätzung für

$$\|y - y_2\| := \max_{x \in [-1, 1]} |y(x) - y_2(x)| \text{ an.}$$

Aufgabe 25 Bestimmen Sie die Lösungen des AWP's

$$y' = \sqrt{1 - y}, \quad y(0) = 1$$

analytisch. Widerspricht dieses Beispiel der Eindeutigkeitsaussage?

Aufgabe 26 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

- a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$.
- b) Führen Sie drei Schritte des Eulerschen Polygonzugverfahrens zur Schrittweite $h = 0.3$ durch und skizzieren Sie diese Schritte im Richtungsfeld.
- c) Führen Sie drei Schritte des durch $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))$ definierten Einschrittverfahrens zur Schrittweite $h = 0.3$ durch und skizzieren Sie diese Schritte im Richtungsfeld.