Prof. Dr. J. Stöckler
PD Dr. Maria Charina-Kehrein Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

8. Übungsblatt zur Numerik II
SS 2010 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Aufgaben 29 und 30 ist Montag, 21.06.10, 12:15 Uhr.
Internetseite:
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2010/numII10.html`

Aufgabe 27

(i) Formen Sie die Anfangswertaufgabe 2.Ordnung

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

in ein System 1.Ordnung um, indem Sie den Funktionsvektor $Y = [y_1, y_2]^T$ mit $y_1 := y$ und $y_2 := y'$ einführen.

(ii) Berechnen Sie eine Darstellung der Werte Y_k des Eulerschen Polygonzugverfahrens für das System in (i) und zur Schrittweite h.

(iii) Sei $x > 0$ fest. Setzen Sie für die Schrittweite $h_{k,x} = \frac{x-x_0}{k}$ in die Darstellung aus (ii) ein und untersuchen Sie die Konvergenz des Verfahrens.

Aufgabe 28 Wie lautet die Zuwachsfunktion des 2−stufigen impliziten Runge–Kutta–Verfahrens

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h,\ y + \frac{h}{4}k_1 + \frac{3-2\sqrt{3}}{12}hk_2\right), \\ k_2 &= f\left(x + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h,\ y + \frac{3+2\sqrt{3}}{12}hk_1 + \frac{h}{4}k_2\right), \\ \Phi &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \end{aligned}$$

wenn die Funktion f der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x), \quad y(c) = v,$$

nicht von y abhängt. Stellen Sie einen Zusammenhang zu einer Quadraturformel her.

Aufgabe 29 (3 Punkte) Schreiben Sie ein MATLAB–Programm

$$[x, y] = rungekutta(x0, y0, xend, 'f', h)$$

zum klassischen Runge–Kutta–Verfahren zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \quad y(x0) = y0,$$

wobei $y : [x0, xend] \to \mathbb{R}^n$ und $y0 \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gelte. Die Ausgabe y sei eine Matrix mit n Zeilen zu den Werten y_k. Die Eingabeschrittweite h soll so modifiziert werden, dass $\frac{xend-x0}{h} \in \mathbb{N}$ gilt. Die Funktion f werde dabei ebenfalls als $m-$file abgelegt. Als Beispiel löse man das Räuber–Beute–Modell von Lotka und Volterra

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= 10y_1(t)(1 - y_2(t)),\\
y_2'(t) &= y_2(t)(y_1(t) - 1),\\
y_1(0) &= 3, \quad y_2(0) = 1,
\end{aligned}$$

im Intervall $[0, 5]$ zur Schrittweite $h = 0.025$ (200 Iterationsschritte).

Aufgabe 30 (3 Punkte) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = -200y(t), \quad y(0) = 5.$$

Bestimmen Sie die obere Schranke h_{max}, so dass das Verfahren von Heun 2.Ordnung bzw. die implizite Trapez–Methode für alle Schritte $0 < h < h_{max}$ eine streng monoton fallende Folge von Näherungslösungen liefert. (**Hinweis:** siehe Beispiel 9.17.)