Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 19.04.2010

Orthogonale Polynome

2. Übung

Aufgabe 4
Die Tschebyscheffpolynome zweiter Art sind mit $x = \cos(t)$ definiert als

$$U_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheffpolynome zweiter Art die folgende Rekursionsgleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),\ n \geq 2. \end{aligned}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheffpolynome zweiter Art ein Orthogonalsystem bilden bezüglich des inneren Produkts

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx.$$

6 Punkte

Aufgabe 5

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \{(a_k)_{k=1}^{\infty} \mid a_k \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty\}$.

(i) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle a, b\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \quad a = (a_k)_{k=1}^{\infty}, b = (b_k)_{k=1}^{\infty} \in V$$

ein inneres Produkt in V erklärt ist.

(ii) Geben Sie ein ONS $\{v_1, v_2, \ldots\}$ in V an.

(iii) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in V$ die Fourierreihe $\sum_{k+1}^{\infty} \langle a, v_k \rangle v_k$ gegen a in der durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ definerten Norm konvergiert.

5 Punkte

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Bekanntlich erfüllt die Lösung des Minimierungsproblems

$$\|Ax^* - b\|_2^2 = \min\{\|Ax - b\|_2^2 \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

die Normalengleichungen $A^T A x^* = A^T b$.
Leiten Sie die Normalengleichungen aus Theorem 1.6 her.

4 Punkte

Abgabe: Montag, 26.04.2010 bis 12 Uhr.