Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 27.04.2010

Orthogonale Polynome

3. Übung

Aufgabe 7
Es gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ und (jeweils ohne Beweis!)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \frac{(2k-1)!}{(k-1)!} \frac{2\sqrt{\pi}}{4^k} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots$$

(i) Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten vier Hermite-Polynome jeweils durch ein Gleichungssystem, das als Koeffizientenmatrix eine Gram-Matrix besitzt.

(ii) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von $G(1, x, x^2, x^3)$ und damit die ersten vier orthonormierten Hermite-Polynome.

8 Punkte

Aufgabe 8
Betrachten Sie $V = \mathcal{P}_n$ mit innerem Produkt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-a}^{a} f(x)g(x)w(x)dx,$$

wobei w eine gerade, nicht-negative Gewichtsfunktion ist. Zeigen Sie

(i) $\langle f, g \rangle = 0$ wenn f ein gerades und g ein ungerades Polynom (aus $\mathcal{P}_n$) ist;

(ii) der Raum der orthogonalen Polynome des Grads n enthält nur gerade Polynome (falls n gerade ist) bzw. nur ungerade Polynome (falls n ungerade);

(iii) Die Monome aus $\mathcal{P}_n$ ordne man so an, dass erst die geraden und dann die ungeraden kommen, also $(v_0, \ldots, v_n) = (1, x^2, x^4, \ldots, x, x^3, \ldots)$. Zeigen Sie, dass die Gram-Matrix $G(v_0, \ldots, v_n)$ Block-Gestalt hat.

3 Punkte

Aufgabe 9
Gegeben seien die Punkte $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ mit $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ und die positiven Gewichte $w_0, \ldots, w_n$.

(i) Zeigen Sie:

$$\langle f, g\rangle := \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)w_i$$

ist ein inneres Produkt in $\mathcal{P}_m$ für $m \leq n$, aber kein inneres Produkt für $m > n$.

(ii) Sei $\{p_0, \ldots, p_n\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$ und

$$X := \begin{pmatrix} p_0(x_0) & \ldots & p_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ p_0(x_n) & \ldots & p_n(x_n) \end{pmatrix}.$$

Desweiteren sei $Q \cdot R$ die QR-Zerlegung von $\begin{pmatrix} \sqrt{w_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{w_n} \end{pmatrix} \cdot X$.

Zeigen Sie, dass $R^T R$ die Cholesky-Zerlegung der Gram-Matrix $G(p_0, \ldots, p_n)$ ist und geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_n$ mit Hilfe von $p_0, \ldots, p_n$ an.

4 Punkte

Abgabe: Montag, 03.05.2010 bis 12 Uhr.