Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 03.05.2010

Orthogonale Polynome

4. Übung

Aufgabe 10
$v_0^*, v_1^*, v_2^*, \ldots$ seien durch das Orthonormierungsverfahren von Gram-Schmidt aus $1, x, x^2, \ldots$ erhalten.
Sei

$$v_n^*(x) = d_{nn}x^n + d_{n,n-1}x^{n-1} + \ldots + d_{n,1}x + d_{n,0}$$

mit $d_{nn} > 0$.
Zeigen Sie, dass die v_n^* die folgende Drei-Term-Rekursionsgleichung erfüllen:

$$v_{n+1}^*(x) = (a_n x + b_n)v_n^*(x) - c_n v_{n-1}^*(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

mit

$$a_n = \frac{d_{nn}}{d_{n-1,n-1}},\ b_n = a_n\Big(\frac{d_{n,n-1}}{d_{nn}} - \frac{d_{n-1,n-2}}{d_{n-1,n-1}}\Big),\ c_n = a_n\frac{d_{n-2,n-2}}{d_{n-1,n-1}}.$$

3 Punkte

Aufgabe 11
Wir betrachten das Integral aus Aufgabe 7. Die orthogonalen Polynome werden in diesen Fall Hermite-Polynome genannt. Wir normieren sie hier so, dass der Höchstkoeffizient jeweils 1 ist.

(i) Beweisen Sie, dass die Hermite-Polynome H_n die Rekursionsgleichung

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

erfüllen. (Frage: Kann man H_0 und H_1 ohne Rechnung direkt angeben?)

(ii) Berechnen Sie b_n, die größte Nullstelle von H_n, für $n = 1, \ldots, 4$ auf drei Nachkommastellen genau.

(iii) Wie verhält sich die Folge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ für wachsendes n?

7 Punkte

Aufgabe 12
Wieviele Lösungen von $x^3 - 7x^2 + 1 = 0$

(i) sind reell ?

(ii) Wieviele liegen im Intervall $(-1, 1)$?

(iii) Geben Sie ein Intervall der Breite $\frac{1}{10}$ an, das die betragsgrößte Nullstelle von $p(x) = x^3 - 7x + 1$ enthält.

5 Punkte

Abgabe: Montag, 10.05.2010 bis 12 Uhr.