Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 10.05.2010

Orthogonale Polynome

5. Übung

Aufgabe 13

V sei ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-linearer Raum, $\{L_1, \ldots, L_n\}$ eine Basis von V' und $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset V$.

Zeigen Sie:

(i) Die Matrix $M := (L_i(p_j))_{i,j=1}^n$ ist genau dann invertierbar, wenn $p_1, \ldots, p_n$ linear unabhängig sind. Geben Sie in diesem Fall mit Hilfe von M Funktionale L_i^* an, so dass $\{p_1, \ldots, p_n\}$ und $\{L_1^*, \ldots, L_n^*\}$ biorthogonal zueinander sind.

(ii) Jedes $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ besitzt die Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} L_i^*(v) \cdot v_i$ mit $L_1^*, \ldots, L_n^*$ wie in (i).

(iii) Jedes $L \in V'$ hat die Darstellung $L = \sum_{k=1}^{n} L(p_k) \cdot L_k^*$ mit $L_1^*, \ldots, L_n^*$ wie in (i).

8 Punkte

Aufgabe 14

(i) Zeigen Sie die Biorthogonaliät von

$$(x-a)^k, \ k = 0, \ldots, n$$

und

$$L_k : f \mapsto \frac{1}{k!} f^{(k)}(a).$$

(ii) Beweisen Sie: $f \in \mathcal{P}_n \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

3 Punkte

Aufgabe 15
Sei $K_n(x,y)$ das Kernpolynom in $\mathcal{P}_n$ mit innerem Produkt

$$\langle p, q\rangle := \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx, \quad w \geq 0 \ \text{Gewichtsfunktion.}$$

Für festes $t \in \mathbb{R}$ sei $K_t(x) := K_n(x,t)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für $t < a$, dass K_t ein orthogonales Polynom des Grads n ist bezüglich des inneren Produkts

$$\langle p, q\rangle_t := \int_a^b p(x)q(x)w(x)(x-t)dx.$$

4 Punkte

Abgabe: Montag, 17.05.2010 bis 12 Uhr.