Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 21.05.2010

Orthogonale Polynome

7. Übung

Aufgabe 19
Sei T_n das n-te Tschebyscheff-Polynom erster Art und sei $m, n \in \mathbb{N}_0,\ m \geq n$.

(i) Zeigen Sie: $T_{m+n} = 2T_nT_m - T_{m-n}$.

(ii) Zeigen Sie: $T_m(T_n(x)) = T_{m \cdot n}(x) = T_n(T_m(x))$.

(iii) Berechnen Sie den Wert von T_{72} an der Stelle $x = 0,9$.

3 Punkte

Aufgabe 20
Sei für beliebige Polynome f und g

$$\langle f, g\rangle_1 := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx, \quad \langle f, g\rangle_2 := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

$\hat{p}_n$ sei n-tes Orthogonalpolynom mit Leitkoeffizient 1 bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\hat{q}_n$ sei n-tes Orthogonalpolynom mit Leitkoeffizient 1 bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$.

(i) Zeigen Sie: $\hat{p}_n(-x) = (-1)^n\hat{q}_n(x)$.

(ii) Zeigen Sie $2^n\hat{p}_n = T_0 + 2\sum_{k=1}^{n} T_k$ für $n \geq 1$.
Tipp: Verwenden Sie Christoffel-Darboux für $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(iii) Leiten Sie die 3-Term-Rekursion für die $\hat{p}_n$ mit Hilfe von (ii) her.

8 Punkte

Aufgabe 21
Sei U_n das n-te Tschebyscheff-Polynom zweiter Art mit $U_n(x) = 2^nx^n + \cdots + a_1x + a_0$.

(i) Äußern Sie eine Vermutung, wie a_0 und a_1 von n abhängen.

(ii) Beweisen Sie die in (i) aufgestellte Vermutung.

4 Punkte

Abgabe: Montag, 31.05.2010 bis 12 Uhr.