

Orthogonale Polynome

10. Übung

Aufgabe 28

Beweisen Sie die aus der Analysis bekannte geometrisch/arithmetische Ungleichung

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \quad \text{für alle } a_1, \dots, a_n \in [0, \infty).$$

Wann gilt dabei das Gleichheitszeichen?

4 Punkte

Aufgabe 29

- (i) Zeigen Sie, dass die Darstellung eines Polynoms als Summe von Quadraten (anderer Polynome) nicht eindeutig ist.
- (ii) Untersuchen Sie, welche der folgenden Polynome Summe von Quadraten sind. Gegebenenfalls geben Sie eine derartige Darstellung an.

(a) $x^2 y^2 - x^2 y + x^2 + x + 1$,

(b) $x^2 y^2 - x^2 y + x^2 - x + 1$.

5 Punkte

Aufgabe 30

Sei $\mathcal{P} := \mathbb{R}[x]$ und $L : \mathcal{P}_6 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert über

$$\begin{aligned} L(1) &= 1, & L(x) &= -2, & L(x^2) &= 5 & L(x^3) &= -10 \\ L(x^4) &= 25, & L(x^5) &= -50 & L(x^6) &= 125. \end{aligned}$$

- (i) Gilt: $f \in \mathcal{P}_6 \cap K_+ \Rightarrow L(f) \geq 0$?
- (ii) Existiert ein $f \in \mathcal{P}_6 \cap K_+, f \neq 0$ und $L(f) = 0$?

6 Punkte

Abgabe: Montag, 21.6.2010 bis 12 Uhr.