Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 25.06.2010

Orthogonale Polynome

12.Übung

Aufgabe 34
Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit folgender Blockgestalt:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times m},\ B \in \mathbb{R}^{m\times k},\ C \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $m + k = n$.

(i) Zeigen Sie, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$(x^T, y^T)M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + A^{-1}By)^T A(x + A^{-1}By) + y^T(C - B^T A^{-1}B)y,$$

falls A symmetrisch und invertierbar ist.

(ii) Beweisen Sie, dass A und $C - B^T A^{-1}B$ genau dann positiv definit sind, wenn M positiv definit ist.

Hinweis: Beachten Sie bitte, dass positiv definite Matrizen immer symmetrisch und invertierbar sind.
4 Punkte

Aufgabe 35
Sei $\mathcal{A}$ ein Ideal. $\mathcal{A}$ heißt *reelles Ideal* dann und nur dann wenn für jede endliche Menge $\{f_1, \dots, f_s\} \subset \mathcal{P}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{s} f_i^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow f_1, \dots, f_s \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie:
Ist L ein quadratpositives Funktional, so ist die Menge $\mathcal{A} := \{f \in \mathcal{P} \mid L(f^2) = 0\}$ ein reelles Ideal.

5 Punkte

Aufgabe 36
Sei $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x]$ und das lineare Funktional $L : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$L(p) := \frac{1}{6}p(0) + \frac{2}{3}p(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}p(1).$$

Bestimmen Sie eine Idealbasis von $\mathcal{A}(L) := \{p \in \mathcal{P} \mid L(p^2) = 0\}$.

6 Punkte

Abgabe: Montag, 12.07.2010 bis 12 Uhr.