Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 02.07.2010

Orthogonale Polynome

13.Übung

Aufgabe 37
Es sei $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x,y]$ und $V_4 = span\{1, x, y, x^2\}$. Zum Funktional $L : V_4 \to \mathbb{R}$ sei D_4 die Momentenmatrix

$$D_4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(i) Ist L quadratpositiv?

(ii) Besitzt L eine Darstellung $L(f) = \sum_{k=1}^{m} A_k f(\xi_k),\ A_k \in \mathbb{R}, \xi_k \in \mathbb{R}^2,\ i = 1, \ldots, m$? Wenn ja, dann geben Sie die A_k und ξ_k bitte explizit an.

5 Punkte

Aufgabe 38
Sei $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x,y,z]$ und ein lineares Funktional $L : \mathcal{P}_4 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} L(p) := \quad & p(1,1,0) + p(1,-1,0) + p(0,\sqrt{3},3) + p(0,-\sqrt{3},3) \\ & + p(1,2,3) + p(1,-2,3) + p(0,0,0) - \tfrac{\partial p}{\partial y}(0,0,0). \end{aligned}$$

L ist quadratpositiv. (Das braucht nicht bewiesen zu werden!) Zeigen Sie, dass L keine Darstellung des Typs

$$L(p) = \sum_{k=1}^{N} A_k p(\xi_k) \qquad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_m.$$

besitzt mit $A_1, \ldots, A_N > 0$, $\xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}^3$ und $N \in \mathbb{N}$.
Tipp: Für die Polynome $f_1 = x^2 - x, f_2 = y^2 - x - z, f_3 = z^2 - 3z$ gilt $L(f_i^2) = 0,\ i = 1, 2, 3.$

6 Punkte

Aufgabe 39
Sei das lineare Funktional $L : \mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}$ ein Tensorprodukt,

$$L(x^i y^j) := L_1(x^i) L_2(y^j), \quad i, j \in \mathbb{N}_0,$$

mit $L_1, L_2 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ linear und strikt quadratpositiv.

(i) Zeigen Sie, dass $P_{r,s}$ mit

$$P_{r,s}(x, y) = p_r(x)q_s(y)$$

orthogonal ist zu allen Polynomen $Q \in \mathbb{R}[x, y]$, deren Grad in x kleiner als r und in y kleiner als s ist. Dabei ist p_r orthogonales Polynom vom Grad r bezüglich L_1 und q_s orthogonales Polynom vom Grad s bezüglich L_2.

(ii) Geben Sie für L eine Basis der orthogonalen Polynome des Grads m an.

4 Punkte

Abgabe: Montag, 19.07.2010 bis 12 Uhr.