Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 12.05.2010

Orthogonale Polynome

6. Übung

Aufgabe 16
Sei $\tilde{p}_n$ das Legendre-Polynom n-ten Grads mit $\tilde{p}_n(1) = 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Zeigen Sie, dass durch

$$\tilde{u}_n(x) := \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \tilde{p}_n\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)$$

ein Polynom des Grads n mit Leitkoeffizient 1 gegeben ist, das orthogonal bezüglich des inneren Produkts $\langle f, g\rangle_{[a,b]} := \int_a^b f(x)g(x)\, dx$ ist. **3 Punkte**

Aufgabe 17
Sei $\tilde{p}_n$ wie in Aufgabe 16.

(i) Beweisen Sie

$$\tilde{p}_n(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} (x+1)^{n-k}(x-1)^k.$$

(ii) Geben Sie $\tilde{p}_n'(1)$, die Ableitung an der Stelle $x = 1$, in Abhängigkeit von n an.

(iii) Geben Sie $\tilde{p}_n(0)$ in Abhängigkeit von n an.

6 Punkte

Aufgabe 18

(i) Betrachten Sie das innere Produkt $\langle f, g\rangle := \int_C f(z)\overline{g(z)}ds$ mit $C := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass p_n mit $p_n(z) := z^n$ orthogonal ist bzgl. dieses inneren Produkts.

(ii) Zeigen Sie, dass die Polynome p_n mit $p_n(x) = x^n$ nicht orthogonal sind, wenn $\langle f, g\rangle := L(fg)$ mit einen quadratpositiven $L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$.

Tipp: Ist $z = e^{i\varphi}$, so ist $\int_C f(z)\overline{g(z)}ds = \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\overline{g(e^{i\varphi})}d\varphi$. **6 Punkte**

Abgabe: Dienstag, 25.05.2010 bis 12 Uhr.