

Orthogonale Polynome

8. Übung

Aufgabe 22

Bestimmen Sie $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ mit

$$\|x^{n+1} - p_n^*\|_2 = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|x^{n+1} - p\|_2,$$

wobei $\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-1}^1 f(x)^2 dx}$.

3 Punkte

Aufgabe 23

Sei U_n das n -te Tschebyscheff-Polynom zweiter Art.

(i) Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $K_n \in \mathbb{R}$ mit

$$U_n(x) = \frac{K_n}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

(ii) Leiten Sie eine explizite Darstellung für $U_n(x)$, $|x| > 1$, her, indem Sie die Drei-Term-Rekursion $a_{n+1} - 2xa_n + a_{n-1} = 0$ als lineare Differenzgleichung für festes x lösen.

8 Punkte

Aufgabe 24

Sei T_n das n -te Tschebyscheff-Polynom erster Art und U_n das n -te Tschebyscheff-Polynom zweiter Art. Zeigen Sie, dass zwischen den Tschebyscheff-Polynomen erster und zweiter Art folgender Zusammenhang besteht:

$$U_n(x) = \frac{xT_{n+1}(x) - T_n(x)}{x^2 - 1} = \frac{T_{n+2}(x) - xT_{n+1}(x)}{x^2 - 1}, \quad n \geq 0.$$

4 Punkte

Abgabe: Montag, 07.06.2010 bis 12 Uhr.