Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko

Dortmund, den 04.06.2010

Orthogonale Polynome

9. Übung

Aufgabe 25

Gegeben sei

$$L_n^{(\alpha)}(x) := \frac{1}{n! x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n \varphi}{dx^n}(x)$$

mit $\varphi(x) = x^{n+\alpha} e^{-x},\ x \in (0, \infty)$ und $\alpha > -1$.

(i) Zeigen Sie, dass $L_n^{(\alpha)}$ ein Polynom vom Grad n ist mit $lc(L_n^{(\alpha)}) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die $L_n^{(\alpha)}$ orthogonale Polynome sind bzgl.

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty f(x) g(x) x^\alpha e^{-x} dx.$$

(iii) Beweisen Sie, dass die Nullstellen von $L_n^{(\alpha)}$ alle einfach und positiv sind.
(Beachten Sie, dass Satz 2.7 nur für Intervalle $[a, b]$ gilt mit $-\infty < a < b < \infty$.)

5 Punkte

Aufgabe 26

Zeigen Sie, dass $p \in \mathcal{P} := \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann in $\mathcal{H}_d$ liegt, wenn

$$\forall c \in \mathbb{R}\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(c \cdot x_1, \ldots, c \cdot x_n) = c^d \cdot f(x_1, \ldots, x_n).$$

4 Punkte

Aufgabe 27

Sei $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x, y, z],\ T = \{x^i y^j z^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$ und $log : T \to \mathbb{N}_0^3$ mit $log(x^i y^j z^k) := (i, j, k)^T$. Desweiteren sei $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\leq_M$ eine totale Ordnung auf T, die definiert ist durch:

$t_\ell <_M t_m \quad :\Leftrightarrow$ *die erste von Null verschiedene Komponente von* $M \cdot (log(t_m) - log(t_\ell))$ *ist positiv.*

(i) Zeigen Sie, dass $\leq_M$ eine zulässige Termordnung auf T ist.

(ii) Ordnen Sie die Terme y^2z^2, xyz, x^2yz und x^2y mit der Ordnung $\leq_M$.

6 Punkte

Abgabe: Montag, 14.06.2010 bis 12 Uhr.