Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 27.5.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 8

Aufgabe 28 (Pflichtabgabe)
Bestimmen Sie für die nilpotente Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(5,5)$$

die Normalform, eine zugehörige Basis von $\mathbb{R}^5$ und das Minimalpolynom $m_A(t)$.

Aufgabe 29 (Pflichtabgabe)
Es sei $F \in \mathrm{Hom}(V)$ mit $F^k \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   i) $m_F(t) = (-t)^{k+1}$

   ii) $G := \mathrm{id}_V - F$ ist invertierbar, und es ist $G^{-1} = \mathrm{id}_V + F + \ldots + F^k$.

b) Bestimmen Sie in der Situation von a) das charakteristische Polynom $P_G(t)$.

Aufgabe 30
Bestimmen Sie A^{20} für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(5,5).$$

Tipp: Achtung beim binomischen Lehrsatz!

Aufgabe 31
Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n,n)$ nilpotent.

a) Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{Spur}\, A^m = 0$.

b) Ist A diagonalisierbar, so ist $A = 0$.

c) Ist A selbstadjungiert, so ist $A = 0$.

d) Geben Sie Bedingungen an die Einträge von $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$, so dass B nilpotent ist.

e) $C \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n,n)$ habe 0 als einzigen Eigenwert. Ist C nilpotent?