Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 10.6.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 10

Aufgabe 36 (Pflichtabgabe)
Es sei V ein $\mathbb{R}$–VR. Zeigen Sie:

a) Sei $F \in \mathrm{Hom}(V)$ diagonalisierbar und $V = \bigoplus_{j=1}^{k} V_j$ direkte Summe F–invarianter Unterräume V_j. Dann ist $F|_{V_j}$ diagonalisierbar ($j = 1, \ldots, k$).

b) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ diagonalisierbar. Dann ist $AB = BA$ genau dann, wenn A und B eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren besitzen. D.h. es gibt ein $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $T^{-1}BT = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

c) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ symmetrisch. Dann gilt: AB ist genau dann symmetrisch, wenn A und B simultan diagonalisierbar sind (im Sinne von b)).

Aufgabe 37 (Pflichtabgabe)
Es sei V ein reeller Vektorraum. Sei weiter $\widetilde{V}$ seine Komplexifizierung, d.h.

$$\widetilde{V} = \{v + iw \mid v, w \in V\}.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{R}$–Basis von V, so ist $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$–Basis von $\widetilde{V}$.

b) Ist $F \in \mathrm{Hom}(V)$, so ist $\widetilde{F} : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ mit $\widetilde{F}(v + iw) := F(v) + iF(w)$ linear und für jede Basis $\mathcal{A}$ von V ist

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\widetilde{F}).$$

Aufgabe 38
Es sei V ein reeller Vektorraum und $\widetilde{V}$ seine Komplexifizierung. Sei weiter $\widetilde{U} \preccurlyeq \widetilde{V}$ ein Unterraum und $\overline{\widetilde{U}} := \{v - iw \mid v, w \in V \text{ und } v + iw \in \widetilde{U}\}$. Außerdem sei $F \in \mathrm{Hom}(V)$. Zeigen Sie:

a) Ist $\widetilde{U}$ $\widetilde{F}$–invariant, so ist auch $\overline{\widetilde{U}}$ $\widetilde{F}$–invariant.

b) Ist $\widetilde{U}$ $\widetilde{F}$–invariant, so ist $\mathrm{Re}\,\widetilde{U} + \mathrm{Im}\,\widetilde{U}$ F–invariant.

c) $\dim_{\mathbb{C}}(\widetilde{U} + \overline{\widetilde{U}}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Re}\,\widetilde{U} + \mathrm{Im}\,\widetilde{U})$.

Aufgabe 39 (Wurzelkriterium für Matrizen)
Für $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n, n)$ ist A^k genau dann beschränkt, wenn die Bedingungen

(i) $S_A \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ und

(ii) $\lambda \in S_A$ mit $|\lambda| = 1$, dann gilt $s_\lambda = r_\lambda$

erfüllt sind.