Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 8.7.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 14

Hinweis zur Klausurzulassung
Die Klausurzulassung ist erworben mit entweder

1. 50% der Punkte auf den Blättern 2 bis 13 oder
2. 50% der Punkte auf den Blättern 2 bis 14. Auf Blatt 14 können wie im ersten Semester 16 von 8 Punkten erworben werden.

Aufgabe 52 (Pflichtabgabe)
Bestimmen Sie für die folgenden beiden Quadriken im $\mathbb{R}^2$ die Hauptachsen und skizzieren Sie die Quadriken.

a) $q(x) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = 2$

b) $Q(x) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + 13x_2^2 = 1$

Aufgabe 53 (Pflichtabgabe)
Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$, A, B symmetrisch und A pos. def.
Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt verallgemeinerter Eigenwert von B, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, so dass die verallgemeinerte Eigenwertgleichung gegeben durch

$$Bx = \lambda Ax$$

erfüllt ist.

a) Zeigen Sie, dass B genau n reelle verallgemeinerte Eigenwerte besitzt. (Tipp: Aufgabe 35)

b) Es seien x bzw. y Eigenvektoren zu verallg. Eigenwerten λ bzw. μ mit $\lambda \neq \mu$.
Zeigen Sie, dass dann
$$\langle x, y \rangle_A = 0.$$

c) Bestimmen Sie für die durch $b_B(x, y) := y^T Bx$ gegebene Bilinearform die Darstellungsmatrix bzgl. einer ONB aus verallg. Eigenvektoren (beachten Sie: Orthogonalität bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$).

Aufgabe 54 (+4 Punkte)

Es seien $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n,n)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die EW von A. Die <u>euklidische Matrixnorm</u> sei definiert durch

$$\|A\| := \left(\sum_{j,k} |a_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie:

a) $\|A\|^2 = \mathrm{Spur}(A^H A) = \mathrm{Spur}(AA^H)$

b) Für $U \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n,n)$, U unitär, gilt: $\|A\| = \|UA\| = \|AU\|$

c) $\sum\limits_j |\lambda_j|^2 \le \|A\|^2$

d) $\sum\limits_j |\lambda_j|^2 = \|A\|^2 \Longleftrightarrow A$ normal

Aufgabe 55 (+4 Punkte)

Es sei $(M, V, \to)$ ein affiner Raum über dem Körper K, $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Für $P_1, Q_1, P_2, Q_2 \in M$ gelte $\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_2 Q_2}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt auch $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{Q_1 Q_2}$.

b) Skizzieren Sie die "Seitenmitten" R_1, R_2, S_1, S_2 mit

$$\overrightarrow{P_1 R_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1 Q_1}, \quad \overrightarrow{P_1 S_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1 P_2}, \quad \overrightarrow{P_2 R_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_2 Q_2}, \quad \overrightarrow{Q_1 S_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{Q_1 Q_2}.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Punkte T_1 und T_2 mit

$$\overrightarrow{R_1 T_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{R_1 R_2}, \quad \overrightarrow{S_1 T_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{S_1 S_2}$$

identisch sind.

c) Zeigen Sie, dass die beiden Punkte T_3 und T_4 mit

$$\overrightarrow{P_1 T_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1 Q_2}, \quad \overrightarrow{Q_1 T_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{Q_1 P_2}$$

identisch sind und mit $T_1 = T_2$ in b) übereinstimmen; geben Sie eine geometrische Interpretation.