Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
PD Dr. Maria Charina
Dipl.-Math. K. Siemko

Dortmund, 01.04.2011

Mathematik II für Informatiker
2. Übung

Abgabe: Bis zum 18. April, 12 Uhr, in den Briefkästen vor der Pförtnerloge im Mathetower. Nur die Aufgaben 5 und 7 sind abgabepflichtig und werden bewertet.

Aufgabe 5 (4+3+2+2 Punkte) Untersuchen Sie die Folgen

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sqrt[n]{3n}(5\cdot(-1)^n + 2\cdot(-1)^{n+1}),\ n\in\mathbb{N}$,

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \frac{2(n+1)(n-2)(n+1)}{100n^3+5n^2+1},\ n\in\mathbb{N}$,

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{2n(n+1)(n-2)(n+1)}{100n^3+5n^2+1},\ n\in\mathbb{N}$,

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \frac{2(n+1)(n-2)(n+1)}{100n^4+5n^3+n},\ n\in\mathbb{N}$.

auf Konvergenz. **Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ verwenden.

Aufgabe 6 Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2a_n}, \quad n\in\mathbb{N},$$

gegen $\sqrt{3}$ konvergiert.

Aufgabe 7 (3+3+3 Punkte)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n > b_n > 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Seien die Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $s_n := a_n + b_n$, $d_n := a_n - b_n$ und $p_n := a_n\cdot b_n$, $n\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so konvergiert auch $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so konvergiert auch $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Wenn $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so konvergiert auch $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass gilt:
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n > 0$, $n\in\mathbb{N}$, so ist auch die Folge $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 8

(i) Es seien die Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 3^{-n}$ und die beschränkte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (-i)^n\cdot(3+2i)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(ii) Seien nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c_n\in\mathbb{C}$ eine Nullfolge und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $d_n\in\mathbb{C}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass dann auch $(c_n\cdot d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.