Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
PD Dr. Maria Charina
Dipl.-Math. K. Siemko

Dortmund, 21.04.2011

Mathematik II für Informatiker
4. Übung

Abgabe: Bis zum 02.05.2011, 12 Uhr, in den Briefkästen vor der Pförtnerloge im Mathetower. Nur die Aufgaben 15 und 16 sind abgabepflichtig und werden bewertet.

Aufgabe 13 Die alternierende harmonische Reihe ist definiert als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Zeigen Sie, dass

(i) diese Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent ist,

(ii) es eine Umordnung der Reihe gibt, so dass die umgeordnete Reihe divergent ist.

Hinweis: Benutzen Sie Satz 4.1.33.

Aufgabe 14 Sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g > 1$. Man nennt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} \quad \text{mit } a_k \in \{0, 1, \dots, g-1\}$$

die g-adische Darstellung der reellen Zahl x, wenn $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k}$.

(i) Schreiben Sie $\frac{3}{4}$ als g-adische Zahl für $g = 3,\ g = 4$ und $g = 5$.

(ii) Zeigen Sie, dass jedes x mit $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k}$ im Intervall $[0, 1]$ liegt.

(iii) Beweisen Sie $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (g-1) g^{-k} = g^{-n},\ n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 15 (3+3+3 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \quad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n^2}\right).$$

Aufgabe 16 (3+2+3+3 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Quotienten-, Wurzel-, Majoranten- oder Minorantenkriteriums auf Konvergenz.

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}\right) 2^{-n}, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-3n},$$

$$\text{(iii)} \sum_{n=0}^{\infty} (4 + 2(-1)^n)^n 7^{-n}, \quad \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} (2+3i) n^{-\frac{1}{p}} \text{ mit } p > 1.$$