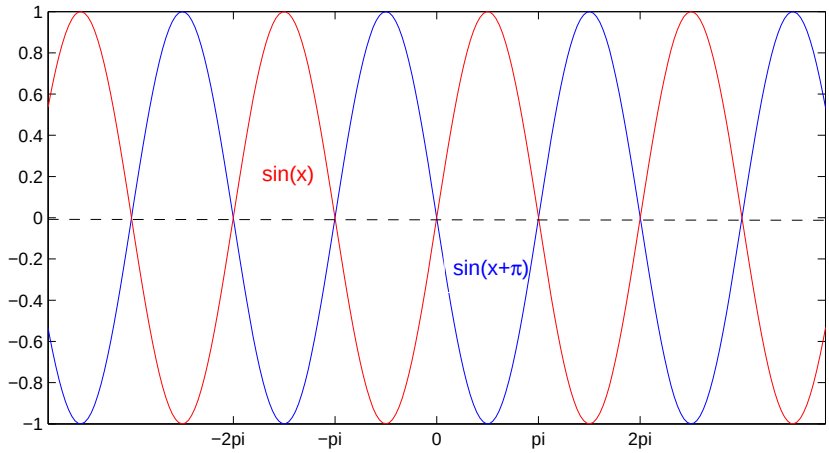
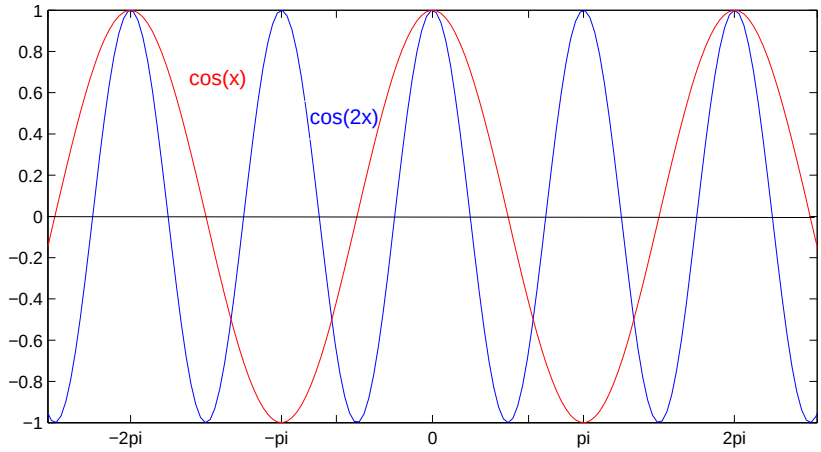
Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
PD Dr. Maria Charina
Dipl.-Math. K. Siemko

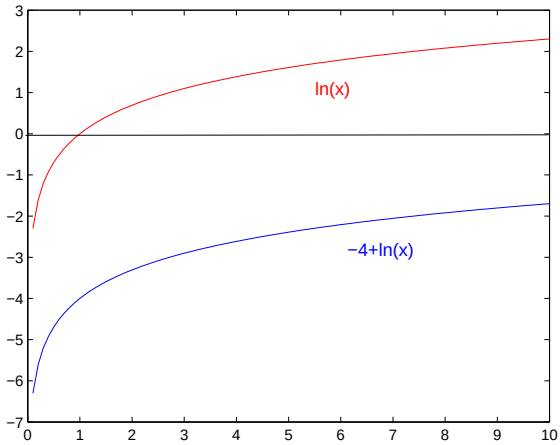
Dortmund, 02.06.2011

Mathematik II für Informatiker
Musterlösung zur 8. Übung

Aufgabe 28







$f(x)$	D	W	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$f(x)=0$
$\sin(x+\pi)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	existiert nicht	existiert nicht	$x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
$\cos(2x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	existiert nicht	existiert nicht	$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$
$-4+\ln(x)$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$	∞	existiert nicht	$x=e^4$

Für $f_1(x) := \sin(x+\pi)$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x+\pi)$ existiert nicht, denn betrachte die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := n\pi$ und $b_n := 2n\pi - \frac{\pi}{2}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f_1(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi+\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_1(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi - \frac{\pi}{2} + \pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Ebenfalls existiert $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin(x+\pi)$ nicht, denn

$$\lim_{n\to\infty} f_1(-a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(-n\pi+\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_1(-b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(-2n\pi + \frac{\pi}{2} + \pi) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

Für die Nullstellen gilt: $\sin(x+\pi) = 0 \Leftrightarrow x+\pi = k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Für $f_2(x) := \cos(2x)$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(2x)$ existiert nicht, denn betrachte die beiden Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$ und $d_n := n\pi$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f_2(c_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2(\frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4})) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_2(d_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Ebenfalls existiert $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(2x)$ nicht, denn

$$\lim_{n\to\infty} f_2(-c_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(-(\frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4})) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_2(-d_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(-2n\pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Für die Nullstellen gilt: $\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Für $f_3(x) := -4+\ln(x)$ gilt: $f_3(x)$ ist monoton wachsend und unbeschränkt. Von daher ist $\lim\limits_{x\to\infty} -4+\ln(x) = \infty$. Da $\ln(x)$ nur für $x>0$ definiert ist, existiert $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x)$ nicht.
Für die Nullstellen gilt: $-4+\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 4 \Leftrightarrow x = \exp(4)$.

Aufgabe 29

(i) $f(x) := \sin\left(\sqrt{x^3+4}\right) + \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \exp\left(\sin(x) + \cos(x)\right),\ x > 0$

Wegen $x^3+4 > 0$ und $x^2+1 > 0$ für $x > 0$ ist f nach Satz 4.3.8(i) und (iv) differenzierbar und es gilt für alle $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\sqrt{x^3+4}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3+4}} \cdot 3x^2 + \left(-\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \\ &\quad + \exp\left(\sin(x) + \cos(x)\right) \cdot \left(\cos(x) + (-\sin(x))\right) \\ &= \cos\left(\sqrt{x^3+4}\right) \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}} - \sin\left(\sqrt{x^2+1}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\quad + \exp\left(\sin(x) + \cos(x)\right) \cdot \left(\cos(x) - \sin(x)\right). \end{aligned}$$

(ii) $g(x) := \sqrt{\frac{x^2+7x+1}{x^3+11}},\ x_0 = 1$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{x^2+7x+1}{x^3+11} > 0$ ist g nach Satz 4.3.8(iii) und (iv) differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+7x+1}{x^3+11}}} \cdot \frac{(x^3+11)\cdot(2x+7) - (x^2+7x+1)\cdot 3x^2}{(x^3+11)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3+11}{x^2+7x+1}} \cdot \frac{-x^4 - 14x^3 - 3x^2 + 22x + 77}{(x^3+11)^2}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{x_0^2+7x_0+1}{x_0^3+11} = \frac{3}{4} > 0$ ist g im Punkt $x_0 = 1$ differenzierbar und es gilt

$$g'(x_0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{9}} \cdot \frac{81}{144} = \frac{3}{16}\sqrt{3}.$$

(iii) $h(x) := 10 \cdot (x^4 + x^2 + 1) \cdot \exp\left(x^2 + x - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$

Nach Satz 4.3.8 (i),(ii) und (iv) ist h differenziebar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 10 \cdot \left[\left(x^4 + x^2 + 1\right) \cdot \exp\left(x^2 + x - 1\right) \cdot (2x+1) + \left(4x^3 + 2x\right) \cdot \exp\left(x^2 + x - 1\right)\right] \\ &= 10 \cdot \exp\left(x^2 + x - 1\right) \cdot \left(2x^5 + 6x^3 + x^4 + x^2 + 4x + 1\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 30

Untersuche

$$f(x) = \begin{cases} x - sin \cdot (\frac{1}{x}), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit.

Für $x \neq 0$ gilt: $f(x) = x \cdot (\frac{1}{x})$ ist differenzierbar, denn :

$g(x)$ ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R}$,
$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{x}$ ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (Quotientenregel),
$i(y) = sin(y)$ ist differenzierbar für $y = \mathbb{R}$
$\Rightarrow (i \circ h)(x) = sin(\frac{1}{x})$ ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (Kettenregel)
$\Rightarrow g(x) \cdot i(h(x)) = f(x)$ ist differenzierbar für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (Produktregel)

Für $x = 0$ gilt:

$$\text{f(x) ist in 0 differenzierbar} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ existiert,}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} \text{ existiert nicht!}$$

$\Rightarrow f$ ist in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 31

(i) Zu bestimmen sind Zahlen $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Führe für f eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} \\ &= \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)}. \end{aligned}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhält man die Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1 = &\quad Ax + Bx - 2A - 3B \\ \Leftrightarrow &\quad \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow &\quad B = -1,\ A = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-2)}$$

Mit Verwendung der geometrischen Reihe ergibt sich die gesuchte Form von f:

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1/3}{1 - x/3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} \quad , \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1/2}{1 - x/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \quad , \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n.$$

Konvergenzradius: $\rho = 2$.

(ii) Zu bestimmen sind Zahlen $b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x^2-5x+6}\right)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n}{3^{n+1}}\right)x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2^{n+2}}-\frac{n+1}{3^{n+2}}\right)x^n \quad ,\rho=2.
\end{aligned}
$$