Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
PD Dr. Maria Charina
Dipl.-Math. K. Siemko

Dortmund, 23.06.2011

Mathematik II für Informatiker
Musterlösung zur 11. Übung

Aufgabe 40 Seien $\phi, \psi \in T_{[a,b]}$ bzgl. der Zerlegungen

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b \quad \text{bzw.} \quad a = y_0 < \cdots < y_m = b$$

und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sei nun $a = z_0 < \cdots < z_k = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass ϕ und ψ Treppenfunktionen auf $[a, b]$ bzgl. dieser Zerlegung sind, und sei $\xi_k \in (x_k, x_{k+1}),\ k = 0, \ldots, n-1$.

(i) zu zeigen: $\int_a^b [\phi(x) + \psi(x)]dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx + \int\limits_a^b \psi(x)dx$.
<u>Beweis:</u> Nach 4.4.3 gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b [\phi(x) + \psi(x)]dx &= \sum_{k=0}^{n-1} [\phi(\xi_k) + \psi(\xi_k)](x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (\phi(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \psi(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\
&= \int\limits_a^b \phi(x)dx + \int\limits_a^b \psi(x)dx.
\end{aligned}$$

(ii) zu zeigen: $\int\limits_a^b (\lambda \cdot \phi(x))dx = \lambda \cdot \int\limits_a^b \phi(x)dx$.
<u>Beweis:</u> Nach 4.4.3 gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b (\lambda \cdot \phi(x))dx &= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda \cdot \phi(\xi_k))(x_{k+1} - x_k) \\
&= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\
&= \lambda \cdot \int\limits_a^b \phi(x)dx.
\end{aligned}$$

(iii) zu zeigen: $\phi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b] \Longrightarrow \int\limits_a^b \phi(x)dx \leq \int\limits_a^b \psi(x)dx$.
<u>Beweis:</u> Es gilt $\phi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b] \Leftrightarrow \psi(x) - \phi(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$
$\Rightarrow \int\limits_a^b \psi(x)dx - \int\limits_a^b \phi(x)dx \overset{(i),(ii)}{=} \int\limits_a^b (\psi(x) - \phi(x))dx = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(\psi(\xi_k) - \phi(\xi_k))}_{\geq 0} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{>0} \geq 0$
$\Rightarrow \int\limits_a^b \psi(x)dx \geq \int\limits_a^b \phi(x)dx$.

Aufgabe 41 Das Oberintegral $Int_0^1(\sqrt{x})$ ist definiert durch

$$Int_a^b(f) = \inf\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx | \phi \in T_{[a,b]}, \phi \geq f\right\}.$$

Falls die Zerlegung $a = x_0^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$ von $[a,b]$ die Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} = 0$$

besitzt, dann gilt auch

$$Int_a^b(f) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sup\left\{f(x) \mid x \in \left(x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}\right)\right\}\cdot\left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\right).$$

In unserem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 = 0,$$

daher gilt auch, da die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ monoton steigend ist,

$$\begin{aligned}
Int_0^1(\sqrt{x}) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}\cdot\frac{k^2+2k+1-k^2}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)(2k+1)}{n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=0}^{n-1}k^2 + 3\sum_{k=0}^{n-1}k + \sum_{k=0}^{n-1}1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(2\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2(n-1)+1)}{6} + 3\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} + n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2-n}{6n^3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Das Unterintegral $int_0^1(\sqrt{x})$ ist definiert durch

$$int_a^b(f) = \sup\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx | \psi \in T_{[a,b]}, \psi \leq f\right\}.$$

Falls die Zerlegung $a = x_0^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$ von $[a,b]$ die Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} = 0$$

besitzt, dann gilt auch

$$int_a^b(f) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\inf\left\{f(x) \mid x \in \left(x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}\right)\right\}\cdot\left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\right).$$

In unserem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 = 0,$$

daher gilt auch, da die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ monoton steigend ist,

$$\begin{aligned}
int_0^1\left(\sqrt{x}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{k^2+2k+1-k^2}{n^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\left(2k+1\right)}{n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=0}^{n-1}k^2+\sum_{k=0}^{n-1}k\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(2\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot\left(2\left(n-1\right)+1\right)}{6}+\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-3n^2-n}{6n^3} = \frac{2}{3}\ .
\end{aligned}$$

Da $int_0^1\sqrt{x} = Int_0^1\sqrt{x}$, ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ Riemann-integrierbar über dem Intervall $[0,1]$ und es gilt

$$int_0^1\sqrt{x} = \int_0^1\sqrt{x}dx = Int_0^1\sqrt{x} = \frac{2}{3}\ .$$

Aufgabe 42 Sei $f(x) := \sqrt{1-x^2}$ Halbkreis mit Radius 1 (vgl Skript).

Die untere Riemann-Summe ist definiert durch

$$\sum_{k=0}^{n-1}\inf\{f(x)\mid x\in(x_k,x_{k+1})\}\cdot(x_{k+1}-x_k).$$

In unserem Fall:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-8}^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{8}\right)^2}\left(\frac{k+1}{8}-\frac{k}{8}\right)+\sum_{k=0}^{7}\sqrt{1-\left(\frac{k+1}{8}\right)^2}\left(\frac{k+1}{8}-\frac{k}{8}\right)\\
&=\frac{1}{8}\left(\sum_{k=-8}^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{8}\right)^2}+\sum_{k=0}^{7}\sqrt{1-\left(\frac{k+1}{8}\right)^2}\right)\approx 1,42.
\end{aligned}$$

Die untere Riemann-Summe ist definiert durch

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sup\{f(x)\mid x\in(x_k,x_{k+1})\}\cdot(x_{k+1}-x_k).$$

In unserem Fall:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-8}^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{k+1}{8}\right)^2}\left(\frac{k+1}{8}-\frac{k}{8}\right)+\sum_{k=0}^{7}\sqrt{1-\left(\frac{k}{8}\right)^2}\left(\frac{k+1}{8}-\frac{k}{8}\right)\\
&=\frac{1}{8}\left(\sum_{k=-8}^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{k+1}{8}\right)^2}+\sum_{k=0}^{7}\sqrt{1-\left(\frac{k}{8}\right)^2}\right)\approx 1,67.
\end{aligned}$$