Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Sommersemester 2012

18.4.2012

Angewandte Harmonische Analysis

1. Übungsblatt

Abgabe 24.4.2012, 14 Uhr, Besprechung in der Übung am 25.4.2012

Aufgabe 1 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei 1-periodisch, die Folge $(\alpha_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ ihrer Fourierkoeffizienten $\alpha_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}\,dt$ sei absolut summierbar.

a) Zeigen Sie, dass für die diskreten Fourierkoeffizienten zur Schrittweite $h = 1/n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) die Identität

$$\beta_k(f) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_{k+ln}(f)$$

gilt.

b) Geben Sie eine geeignete Fehlerabschätzung für $|\alpha_k(f) - \beta_k(f)|$ im Bereich $|k| \le n/2$ an, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ r-mal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 2 Überprüfen Sie die Aussage des Faltungssatzes der diskreten Fouriertransformation anhand der konkreten n-periodischen Folgen $(y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ und $(z_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ mit

$$y_j = \begin{cases} 1, & j \equiv 0 \bmod n \\ -1, & j \equiv 1 \bmod n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad z_j = j \text{ für } 0 \le j \le n-1.$$

Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar; verwenden Sie hierzu $n = 128$ und die Matlab-Routinen `fft`, `ifft`, `fftshift`.

Aufgabe 3 Bei der Verarbeitung diskreter n-periodischer Signale $(y_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in S_n$ treten häufig die folgenden zwei Operationen auf. Bestimmen Sie jeweils Formeln für die diskreten Fourierkoeffizienten der Folgen z aus den Koeffizienten $\hat{y}_k$.

- "Upsampling" (=Einfügen von Nullen): für festes $l \in \mathbb{N}$, $l \ge 2$, ist

$$U_{n,l} : S_n \to S_{ln}, \quad z = U_{n,l}y \text{ mit } z_j = \begin{cases} y_{j/l}, & j \equiv 0 \bmod l \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- "Downsampling" (=Streichen von Folgengliedern): für festes $l \in \mathbb{N}$, $l \ge 2$, ist

$$D_{n,l} : S_{ln} \to S_n, \quad z = D_{n,l}y \text{ mit } z_j = y_{lj}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Verkettungen $D_{n,l} \circ U_{n,l}$ und $U_{n,l} \circ D_{n,l}$.

Aufgabe 4 Wir betrachten hier reelle Signale $y \in S_m$, $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die (mit dem Faktor $2/m$ normalisierte) diskrete Kosinus-Transformation (Typ II)

$$\hat{y}_k = \frac{2}{m} \sum_{j=0}^{m-1} y_j \cos \frac{k(2j+1)\pi}{2m}, \qquad 0 \le k \le m-1,$$

als Inverse die diskrete Kosinus-Transformation (Typ III)

$$y_j = \frac{\hat{y}_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \hat{y}_k \cos \frac{k(2j+1)\pi}{2m}, \qquad 0 \le j \le m-1,$$

besitzt.

Zeigen Sie außerdem den folgenden Zusammenhang zur diskreten Fouriertransformation:
Für $y = (\ldots, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, \ldots) \in S_m$ definieren wir $z \in S_{4m}$ durch

$$(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{4m-1}) = (0, y_0, 0, y_1, \ldots, 0, y_{m-2}, 0, y_{m-1}, 0, y_{m-1}, 0, y_{m-2}, \ldots, 0, y_1, 0, y_0).$$

Dann stimmt der DCT-II Koeffizient $\hat{y}_k$ mit dem DFT Koeffizienten $4\hat{z}_{2k}$ überein.

Zusatzaufgabe Machen Sie sich mit den Routinen der "Time-Frequency-Toolbox" (web-Seiten Suche von "tftb") mit den Namen atoms, amgauss, fmconst vertraut, indem Sie einige Grafiken mit diesen Funktionen erstellen.