Technische Universität Dortmund — Sommersemester 2012
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler — 25.4.2012

Angewandte Harmonische Analysis

2. Übungsblatt

Abgabe 3.5.2012, 14 Uhr. Die Übung am 2.5. entfällt, Besprechung der Aufgaben in der Übung am 9.5.2012

Aufgabe 5 In der Vorlesung wurde ungenau mit dem Erwartungswert schwach stationärer Folgen von Zufallsvariablen gearbeitet. Dies wird hier aufgearbeitet.

$(Y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ sei eine n-periodische schwach stationäre Folge von komplexen Zufallsvariablen, es gelte $E(Y_j) = \mu \in \mathbb{C}$ und $E(Y_j\overline{Y}_{k+j}) = r_k$ für $j,k \in \mathbb{Z}$. Weiterhin sei $Z_j = Y_j - \mu$ für $j \in \mathbb{Z}$.

a) (Z_j) ist schwach stationär mit $E(Z_j) = 0$ und $s_k := E(Z_j\overline{Z}_{k+j}) = r_k - |\mu|^2$.

b) Für die Cramér-Zerlegungen

$$Y_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ijk/n}\hat{Y}_k, \qquad Z_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ijk/n}\hat{Z}_k, \qquad j \in \mathbb{Z},$$

gilt $\hat{Y}_0 = \hat{Z}_0 + \mu$, $\hat{Y}_k = \hat{Z}_k$ für $1 \le k \le n-1$, sowie $E(\hat{Z}_k) = 0$ für $0 \le k \le n-1$.

c) Es gilt $r_0 = |\mu|^2 + \mathrm{Var}(Y_j)$ sowie $\mathrm{Var}(Y_j) = \mathrm{Var}(Z_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Var}(\hat{Z}_k)$.

d) Wie verhalten sich die Power-Spektren $\hat{r}_k$ und $\hat{s}_k$ zueinander?

Aufgabe 6 Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 5 definieren wir die Korrelationsmatrizen

$$R = (r_{k-j})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \qquad S = (s_{k-j})_{j,k=0,\ldots,n-1}.$$

Zeigen Sie:

a) $R = S + |\mu|^2E$ mit der Matrix $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit lauter Einsen.

b) R ist positiv semi-definit. (Tipp: für einen Vektor $c \in \mathbb{C}^n$ ist $c^*Rc = E\left(\left|\sum_j c_jY_j\right|^2\right)$.)

c) Für einen Vektor $c \in \mathbb{C}^n$ gilt genau dann $c^*Rc = 0$, wenn $\mathrm{Prob}\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_jY_j = 0\right) = 1$ gilt. (Mit anderen Worten: R ist nicht invertierbar genau dann, wenn der Zufallsvektor $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ linear abhängig ist.)

Aufgabe 7 Ein schwach stationärer Zufallsvektor $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ beschreibt ein "weißes Rauschen" mit Varianz σ^2, wenn $E(Y_j) = 0$ und $E(Y_j\overline{Y}_{j+k}) = \delta_k\sigma^2$ gilt. Weisen Sie nach, dass die Komponenten $\hat{Y}_k$ der Cramér-Zerlegung ebenfalls ein weißes Rauschen (mit Varianz σ^2/n) beschreiben.

Zusatz: Falls $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ mehrdimensional normalverteilt ist, so ist auch $(\hat{Y}_0, \ldots, \hat{Y}_{n-1})$ mehrdimensional normalverteilt; siehe Stochastik-Lehrbuch.

Aufgabe 8

a) Vergleichen Sie das Power-Spektrum des weißen Rauschens, das sie einmal mit der Matlab-Funktion `randn` und weiterhin mit der Funktion `powernoise` auf der Vorlesungswebseite erzeugen (jeweils $n = 64, 256, 1024$).

b) Berechnen Sie mit Matlab die inverse Fouriertransformierte (w_j) der $2n$-periodischen Folge $(\hat{w}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $\hat{w}_k = (1+|k|)^{-1}$, $-n \le k \le n-1$. Vergleichen Sie sodann das Power-Spektrum des "rosa-farbenen" Rauschens vom Typ "1/f", das sie einmal durch Faltung des weißen Rauschens (`randn`) mit der Folge w_j erzielen und andererseits mit der Funktion `powernoise` (jeweils $n = 64, 256, 1024$).