Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Sommersemester 2012

9.5.2012

Angewandte Harmonische Analysis

3. Übungsblatt

Abgabe 15.5.2012, 14 Uhr. Besprechung der Aufgaben in der Übung am 16.5.2012

Aufgabe 9 Die (periodische) Funktion $f \in L_2(0,1)$, $f \not\equiv 0$, habe die Fourierkoeffizienten

$$\alpha_k = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t}\, dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Beweisen Sie, dass das 1. trigonometrische Moment $\tau^*(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_0^1 e^{2\pi i t} |f(t)|^2\, dt$ die Darstellung mit Hilfe der Fourierkoeffizienten

$$\tau^*(f) = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \overline{\alpha_{k+1}}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2}$$

besitzt. Zeigen Sie damit, dass $|\tau^*(f)| < 1$ für jedes $f \in L_2(0,1)$ gilt und geben Sie eine neue Darstellung der Varianz des Arguments von f mit Hilfe der Fourierkoeffizienten an.

Aufgabe 10 Die Fourierkoeffizienten der *geraden* 1-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1 - 2t$ im Intervall $[0, 1/2]$ lauten $\alpha_0(f) = 1/2$, $\alpha_k(f) = 2/(k\pi)^2$ für ungerades $k \in \mathbb{Z}$ und $\alpha_k(f) = 0$ für gerades $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Skizzieren Sie f (mehrere Perioden) und berechnen Sie die Parameter τ^*, ω^* sowie die Varianzen und das Produkt in der Unschärferelation nach Breitenberger.

Aufgabe 11 Für die Gauß-Funktion g_a mit $g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-t^2/a}$ mit $a > 0$ (Normierung wie in der Vorlesung so, dass $\int_{\mathbb{R}} g_a(t)\, dt = 1$ gilt) berechne man die Zeit- und Frequenz-Zentren sowie die entsprechende Varianz und das Produkt in der Heisenbergschen Unschärferelation. (In der Vorlesung wurde bei einem Ergebnis der Faktor 2π vergessen, also Vorsicht.)

Aufgabe 12 Die Programme `loctime` und `locfreq` der Time-Frequency Toolbox bestimmen die Zeit- und Frequenz-Zentren sowie die Wurzeln der entsprechenden Varianz (Achtung: Normalisierung unterscheidet sich von unserer Definition.)
Bestimmen Sie die Werte für verschiedene Signale der Längen $N = 16, 64, 256$, und zwar

a) Gaußkurve erzeugt mit `amgauss` sowie modulierte Gaußkurve (siehe `fmconst`).

b) Rechteckfenster `amrect` und Dreiecksfenster `amtriang`.

Beschreiben Sie den Einfluss der Modulation und von N auf die Ergebnisse.