Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Sommersemester 2012

16.5.2012

Angewandte Harmonische Analysis

4. Übungsblatt

Abgabe 22.5.2012, 14 Uhr. Besprechung der Aufgaben in der Übung am 23.5.2012

Aufgabe 13 Die Kurzzeit-Fouriertransformation $V_g f$ für die Gauß-Funktionen f, g mit

$$f(t) = \sqrt[4]{2\alpha}\; e^{-\pi\alpha t^2}, \quad g(t) = \sqrt[4]{2\beta}\; e^{-\pi\beta t^2}, \qquad t \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta > 0,$$

ist (vgl. Vorlesung: jetzt sind die Exponenten mit π multipliziert)

$$V_g f(t,\omega) = \frac{\sqrt[4]{2\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}} \exp\left(-2\pi i \frac{\beta t\omega}{\alpha+\beta}\right) \exp\left(-\pi\alpha\beta \frac{t^2}{\alpha+\beta}\right) \exp\left(-\pi \frac{\omega^2}{\alpha+\beta}\right).$$

Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Parameter e_t, $\omega^*(f,t)$ sowie $\mathrm{Var}_F(f,t)$ des Spektrogramms $S_g f = |V_g f|^2$. Zeigen Sie außerdem, dass

$$(\mathrm{Var}_T(f,\omega)\mathrm{Var}_F(f,t))^{1/2} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} (\mathrm{Var}_T(f)\mathrm{Var}_F(f))^{1/2} \geq 2\, (\mathrm{Var}_T(f)\mathrm{Var}_F(f))^{1/2}$$

gilt.

Aufgabe 14 Wir betrachten den linearen Chirp

$$f(t) = \sqrt[4]{2\alpha}\; e^{-\pi(\alpha - i\gamma)t^2}, \qquad t \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

Seine Fouriertransformierte ist (analog zur Gauß-Funktion mit reellem Faktor, siehe Bsp. 1.1)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt[4]{2\alpha}}{\sqrt{\alpha - i\gamma}} e^{-\pi\omega^2/(\alpha - i\gamma)}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie Zeit- und Frequenzvarianz von f.

Aufgabe 15 Zum linearen Chirp f in Aufgabe 14 bilden wir die Kurzzeit-Fouriertransformation mit der gleichen Fensterfunktion g wie in Aufgabe 13; dies liefert (Nachweis ist nicht erforderlich)

$$V_g f(t,\omega) = \frac{\sqrt[4]{4\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta-i\gamma}} \exp\left(-2\pi i \frac{\beta t\omega}{\alpha+\beta}\right) \exp\left(-\pi t^2 \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} - i\frac{\gamma\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\right)\right) \exp\left(-\frac{\pi}{\alpha+\beta-i\gamma}\left(\omega - \frac{\gamma\beta t}{\alpha+\beta}\right)^2\right).$$

Berechnen Sie hieraus die sechs Parameter e_t, e_ω, $\omega^*(f,t)$, $t^*(f,\omega)$ sowie $\mathrm{Var}_F(f,t)$, $\mathrm{Var}_T(f,\omega)$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 14.

Aufgabe 16 Die Kurzzeit-Fouriertransformation wird mit dem Programm `tfrstft` der Time-Frequency Toolbox berechnet.
Berechnen Sie damit die Kurzzeit-Fouriertransformation des linearen Chirps ($\alpha = .01$, $\gamma = 0.005$), der auf dem Intervall $t \in [-128, 127]$ ganzzahlig abgetastet wird ($N = 256$), mit Fensterfunktionen zu verschiedenen Parametern β. Stellen Sie weiterhin die Funktionen $t^*(f,\omega)$, $\omega^*(f,t)$ und die zugehörigen Varianzen graphisch dar (hierzu: `loctime` und `locfreq` auf Zeilen/Spalten der STFT anwenden).
Ein Beispiel zur Berechnung der STFT finden Sie im Tutorial der Time-Frequency Toolbox.

Aufgabe 17 (Zusatzaufgabe zum Punktesammeln) $V_g f$ sei die Kurzzeit-FT von $f \in L_2(\mathbb{R})$ zu einem Fenster $g \in L_1 \cap L_\infty$, und es gelte $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$. Zeigen Sie für die "globalen Mittel"

$$\int_{\mathbb{R}} t e_t \, dt = \int_{\mathbb{R}} t^*(f,\omega) e_\omega \, d\omega = t^*(f) - t^*(g), \qquad \int_{\mathbb{R}} \omega e_\omega \, d\omega = \int_{\mathbb{R}} \omega^*(f,t) e_t \, dt = \omega^*(f) - \omega^*(g).$$