Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Sommersemester 2012

23.5.2012

Angewandte Harmonische Analysis

5. Übungsblatt

Abgabe 29.5.2012, 14 Uhr. Besprechung der Aufgaben in der Übung am 30.5.2012

Basen und Frames

Aufgabe 18 Oft verwendete Beispiele zur Veranschaulichung des Basisbegriffs in Banachräumen sind die Vektorräume c_0 der reellen Nullfolgen und c der konvergenten Folgen,

$$c_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}, \qquad c = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R},\ (a_n) \text{ konvergent}\},$$

jeweils versehen mit der Norm

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

a) Zeigen Sie, dass die Familie der "kanonischen Einheitsvektoren" $e_j = (\delta_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$, eine unbedingte Basis von c_0 ist.

b) Durch Hinzunahme des Vektors $e = (1, 1, 1, \dots)$ erhält man eine unbedingte Basis von c.

Aufgabe 19 Die Familie der Vektoren $f_j = \sum_{k=1}^{j} e_k$ ist eine Schauder-Basis von c_0, aber keine unbedingte Basis von c_0.
(Beweisidee für Schauder-Basis: für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ zeige man

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j+1}) f_j = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j - a_{n+1} f_n,$$

(dies ist übrigens Abelsche partielle Summation). Beweisidee zur "bedingten Basis": man zeige, dass $\sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, und schließe hieraus weiter.)

Aufgabe 20 Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$. Zu m Vektoren $v_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq m$, definieren wir die linearen Operatoren

$$C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad Cx = (v_j^T x)_{j=1,\dots,m}, \qquad D : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad Da = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j.$$

Geben Sie die Matrixdarstellungen von C und D (bzgl. der kanonischen Basen) an und bestimmen Sie die bestmöglichen Konstanten A, B in der *Frame-Bedingung*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{m} |\langle x, v_j\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(Tipp: Singulärwertzerlegung)