Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Sommersemester 2012

9.6.2012

Angewandte Harmonische Analysis

6. Übungsblatt

Abgabe 19.6.2012, 14 Uhr. Besprechung der Aufgaben in der Übung am 20.6.2012

Gabor Frames

Aufgabe 21 Es seien $g, \gamma \in L_2(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta > 0$ so gegeben, dass $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ und $\mathcal{G}(\gamma, \alpha, \beta)$ Bessel-Familien sind. Geben Sie mit den Methoden aus der Vorlesung eine Matrix-Darstellung des Operators

$$Q_{g,\gamma} : \ell_2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \quad (c_{k,l})_{k,l\in\mathbb{Z}} \to \left(\left\langle \sum_{k,l} c_{k,l} M_{l\beta} T_{k\alpha} g,\ M_{n\beta} T_{m\alpha} \gamma \right\rangle \right)_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

an.

Wir betrachten in den folgenden Aufgaben die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 22 Zeigen Sie mit Hilfe des Schur-Tests, dass für beliebige $\alpha, \beta > 0$ die Matrix $P(t) = (g(t - k\alpha - \frac{l}{\beta}))_{k,l\in\mathbb{Z}}$ einen linearen beschränkten Operator auf $\ell_2(\mathbb{Z})$ definiert.
Welche Aussage können Sie hieraus für die Gabor-Familie $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ folgern?

Aufgabe 23 Nun seien $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha\beta \leq 1$ gegeben.
Beweisen Sie, dass die Matrix $P_\gamma(t)$ zur Funktion

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} \beta e^{t}, & 0 \leq t < \alpha \\ -\beta e^{t}, & -\alpha < t < 0 \\ 0, & |t| \geq \alpha, \end{cases}$$

die Identität $P_\gamma(t)^* P_g(t) = \beta \mathrm{Id}_{\ell_2(\mathbb{Z})}$ erfüllt.

Aufgabe 24 Führen Sie für die Matrizen $P_\gamma(t)$ in Aufgabe 23 den Schur-Test durch und bestimmen Sie Frame-Schranken der Gabor-Familie in Aufgabe 22 für $\alpha\beta \leq 1$.