Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl VIII - Approximationstheorie
Prof. Dr. Joachim Stöckler

Sommersemester 2012

24.6.2012

Angewandte Harmonische Analysis

7. Übungsblatt: Projektwoche

Vorstellung der Ergebnisse in der Übung am 4.7.2012, 16 Uhr.

Duale Gabor Frames

Bei numerischen Rechnungen wird häufig ein diskretes periodisches Signal

$$x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \quad \text{mit Periode } N_1 \in \mathbb{N}$$

betrachtet. Programmeingabe ist dann der Vektor $x = [x(0), \ldots, x(N_1 - 1)]$ einer Periodenlänge. Die Fenster“funktion” g wird ebenso als N_1-periodischer Vektor verstanden. Der Matlab-Aufruf `g=tftb_window(n,`'*name*'`)` der Time-Frequency-Toolbox erzeugt (für ungerades $n = 2k + 1$) dafür nur den von Null verschiedenen Teil des Fensters, das bei 0 zentriert ist, also den Vektor

$$\mathtt{g} = [\mathtt{g}(-\mathtt{k}), \mathtt{g}(-\mathtt{k}+1), \ldots, \mathtt{g}(\mathtt{k})]. \tag{1}$$

Das wirkliche Fenster wird erst im Programm `tfrgabor` als Variable `hN1` aufgestellt.

Das von mir leicht modifizierte Programm `mytfrgabor` leistet beim Aufruf

$$[\mathtt{tfr}, \mathtt{dgr}, \mathtt{gam}, \mathtt{hN1}, \mathtt{Mzh}, \mathtt{f}] = \mathtt{mytfrgabor}(\mathtt{x}, \mathtt{N}, \mathtt{Q}, \mathtt{g});$$

mit dem Vektor x der Länge N_1 folgendes.

- `N` ist die Anzahl der Modulationen; dies entspricht der Wahl $\beta = 1/N$ im kontinuierlichen Fall. N muss ein Teiler von N_1 sein.
- `Q` ist die “Oversamplingrate”; dies entspricht der Wahl $\alpha = N/Q$ im kontinuierlichen Fall (dies ist `Nb` in `tfrgabor`), also der Beziehung $\alpha\beta = 1/Q$. Q muss in diesem speziellen Programm ein Teiler von N sein.
- Durch die Vorgaben `N,Q` ist auch die Anzahl $M = N_1/\alpha = QN_1/N$ der Zeit-Shifts festgelegt.
- `g` ist der bei Null zentrierte Teil des Fensters, wie in (1) angegeben.
- `hN1` ist das wirkliche Fenster auf dem Zeitintervall $0 : N_1 - 1$.
- `gam` ist das (kanonische) duale Fenster zu `hN1` auf dem Zeitintervall $0 : N_1 - 1$. Die Dualität wird im diskreten periodischen Fall ausgedrückt durch die Identität
$$\sum_{k=0}^{M-1} \gamma(j - k\alpha)\overline{g}\left(j - k\alpha - \frac{m}{\beta}\right) = \beta\delta_{0,m}, \qquad j = 0, \ldots, \alpha - 1,\ m = 0, \ldots, \frac{M}{Q} - 1.$$
Speziell in diesem Fall $\alpha\beta = 1/Q$ ist die Berechnung direkt möglich mit Hilfe der sog. Zak-Transformation von A. J. E. M. Janssen. Details findet man im Programm `tfrgabor` oder im Buch von K. Gröchenig.
- `Mzh` ist ein Divisor zur Berechnung des dualen Fensters. Hat `Mzh` Nullstellen, so ist das duale Fenster nicht definiert oder zumindest schlecht lokalisiert. Dann erscheint eine Warnung in der Ausgabe.
- `dgr` ist das $N \times M$-Feld der Gabor-Koeffizienten $\langle x, M_{l\beta}T_{k\alpha}\gamma\rangle$.
- `tfr` ist das Quadrat der Absolutbeträge von `dgr`, also sozusagen das Spektrogramm von x zur Fensterfunktion γ. Der Aufruf ohne Outputargumente produziert einen Farbplot von `tfr`.
- `f` wird zur Kontrolle ausgegeben und sollte mit x (oder $x.'$, falls x Spaltenvektor ist) übereinstimmen, denn
$$f = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} \langle x, M_{l\beta}T_{k\alpha}\gamma\rangle\ M_{l\beta}T_{k\alpha}g$$
ist die Rekonstruktion von x aus den Gabor-Koeffizienten `dgr`.

Damit ist hoffentlich die Benutzung von `mytfrgabor` klar. Dies sind Ihre Aufgaben:

1. Verwenden Sie das Programm, um zu vier verschiedenen Fenstern aus `tftb_window`, Fensterbreiten 5, 17, 65, und Parametern α, β mit $\alpha\beta = 1, 1/2, 1/4$ sowie Längen $N_1 = 128, 1024$ duale Fenster γ zu erzeugen. Kontrollieren Sie dabei die Gültigkeit von γ durch Vergleich von f und x (z.B. `norm(x-f)`); im Falle der Abweichung sind Nullstellen im Feld `Mzh` aufzuspüren und zu dokumentieren.

2. Finden Sie für das Dreiecksfenster `triang` im Fall $N_1 = 128$ (Signallänge), $n = 17$ (Fensterbreite), $N = 4$ und $Q = 2$ heraus, ob die Matrix $P(j) = (g(j - k\alpha - m/\beta))_{\substack{0 \le k \le M-1 \\ 0 \le m \le M/Q-1}}$ für jedes $j = 0, \ldots, \alpha - 1$ eine Linksinverse besitzt. Falls nicht, finden Sie einen Vektor im Kern einer dieser Matrizen.

3. Vergleichen Sie für das Dreiecksfenster `triang` im Fall $N_1 = 128$ (Signallänge), $n = 17$ (Fensterbreite), $N = 16$ und $Q = 2$ jeweils die Matrix $P(j) = (g(j - k\alpha - m/\beta))_{\substack{0 \le k \le M-1 \\ 0 \le m \le M/Q-1}}$ für $j = 0, \ldots, \alpha - 1$ mit der Moore-Penrose Inversen der zugehörigen Matrix für γ (matlab `pinv`).

4. Führen Sie Aufgabenstellungen 1-3 für ein Fenster g aus der Familie der total positiven Funktionen endlichen Typs durch. (Achtung: N_1-Periodisierung von g nicht vergessen.)

5. Abschließend erzeugen Sie bitte die Plots des Spektrogramms `tfr` für das Signal `x=fmlin(128)` und die Fenster in 1. und 4. mit Fensterbreite $n = 17$.

Bereiten Sie sich bitte auf die Präsentation der Ergebnisse in der Übung am 4.7.2012 vor und bringen Sie Ihren Laptop dazu mit, soweit vorhanden.