Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 02.04.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium
1. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte) Es seien

$$A_1 := \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte von A_1 und A_2.

(ii) Bestimmen Sie jeweils wenn möglich drei linear unabhängige Eigenvektoren von A_1 und A_2.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $P_A(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - x$ besitzt.

(ii) Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, deren charakteristisches Polynom $P_B(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist λ Eigenwert einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} Eigenwert der Matrix A^{-1}.

(ii) Ist λ Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $k \in \mathbb{N}$, so ist λ^k Eigenwert der Matrix A^k.

(iii) Die obere Dreiecksmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $a_1, \dots, a_n$.

Aufgabe 4 Man betrachte eine Korallenpopulation. Jedes Jahr fährt ein Öltanker vorbei, der über dem Korallenriff seine Tanks säubert. Dabei sterben alle über zweijährigen Korallen. j_k sei das Gesamtvolumen aller jungen Korallen (maximal ein Jahr alt) im Jahr k in Kubikmetern. Entsprechend seien m_k das Volumen aller ein- bis zweijährigen Korallen und a_k das Volumen aller zwei- bis dreijährigen Korallen im Jahr k. Es gelte $j_{k+1} = \frac{7}{9}m_k + \frac{2}{9}a_k$.

(i) Wir nehmen an, dass im Jahr 0 nur 100 Kubikmeter junge Korallen existierten. Wie viele Kubikmeter Korallen gibt es im Jahr $k = 1, \ldots, 4$?

(ii) Berechnen Sie von der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\begin{pmatrix} j_{k+1} \\ m_{k+1} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} j_k \\ m_k \\ a_k \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte und eine Basis aus Eigenvektoren von $\mathbb{R}^3$.

(iii) Gibt es Startwerte j_0, m_0, a_0, bei denen die Population eingeht oder unbegrenzt wächst?

Abgabe: Dienstag, 10.04.2012 bis 10 Uhr. (Ab dem 2. Übungsblatt: Abgabe immer montags bis 16 Uhr.)