Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 18.06.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium
12. Übung

Aufgabe 45 (5 Punkte) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, A ist genau dann positiv definit, wenn ein $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert mit $A = B^H B$.
Tipp: Benutzen Sie Satz 8.45 für eine der beiden Beweisrichtungen.

Aufgabe 46 (6 Punkte) Es sei $\mathbb{C}^3$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{3} x_i \overline{y_i}.$$

Berechnen Sie ausgehend von der Basis $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$ eine unitär orthonormale Basis von $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 47 Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$, und $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ seien Skalarprodukte auf $\mathbb{C}^n$. Mit Hilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt werden bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ ausgehend von der Basis $v_1, \ldots, v_n$ unitär orthonormale Basen $u_1, \ldots, u_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ berechnet. Im Anschluss wird mit demselben Verfahren ausgehend von $u_1, \ldots, u_n$ eine unitär orthonormale Basis $u'_1, \ldots, u'_n$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ berechnet. Man zeige, es existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha_k| = 1$ und $u'_k = \alpha_k w_k$ für $k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 48 (4 Punkte) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch mit den Eigenwerten 1 und 3. Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 seien $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(i) Berechnen Sie eine Matrix A mit diesen Eigenschaften.

(ii) Ist A eindeutig bestimmt?

Abgabe: Montag, 25.06.2012 bis 16 Uhr.