Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 09.04.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium

2. Übung

Aufgabe 5 (5 Punkte) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 8 \\ 8 & 16 & -20 \\ 8 & -20 & -11 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $A = T \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot T^{-1}$ ist.

Aufgabe 6

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Matrizen A^TA und AA^T dieselben Eigenwerte besitzen.

(ii) Berechnen Sie die Eigenwerte von A^TA und AA^T für $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Berechnen Sie die Eigenwerte von A^TA und AA^T für $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$. Zeigen Sie, dass A dann nur den Eigenwert Null besitzt.

Aufgabe 8 (6 Punkte) Gegeben seien die Werte $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ und $\lambda_3 = 1$ und die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, für die v_1 Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 ist, v_2 Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 und v_3 Eigenvektor zum Eigenwert λ_3 ist.

(ii) Ist diese Matrix eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: Montag, 16.04.2012 bis 16 Uhr.