Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 16.04.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium

3. Übung

Aufgabe 9 (4 Punkte) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jordan-Normalformen von A und B.

Aufgabe 10 (5 Punkte) Zu $A \in K^{4\times 4}$ existiere eine reguläre Matrix $T \in K^{4\times 4}$ mit

$$AT = T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von T seien $t_1, \ldots, t_4$.

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(ii) Es sei $V = Lin\{t_1, t_2\}$. Zeigen Sie: $v \in V \Rightarrow Av \in V$.

(iii) Zeigen Sie, dass $Lin\{t_1, t_2\} \oplus Lin\{t_3\} \oplus Lin\{t_4\} = K^4$.

Aufgabe 11 Es sei $V_n := \{f \in K[x] \mid Grad(f) \leq n\}$ und $s : V_n \times V_n \to K$ mit

$$s(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

(i) Zeigen Sie, dass s eine symmetrische Bilinearform ist.

(ii) Berechnen Sie die Gramsche Matrix von s zur Basis $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

Aufgabe 12 (6 Punkte) Es sei $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) := x_1y_2 - x_2y_1$.

(i) Ist s eine Bilinearform?

(ii) Ist s symmetrisch?

(iii) Stellen Sie die Gramsche Matrix M von s zur Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ auf.

(iv) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

(v) Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{R}^3$, für die gilt: $s(v, w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{R}^3$.

Abgabe: Montag, 23.04.2012 bis 16 Uhr.