Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 23.04.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium
4. Übung

Aufgabe 13 (8 Punkte) Gegeben seien die quadratischen Formen

$$q_1(x_1,x_2,x_3) := x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3,\ q_2(x_1,x_2,x_3) := x_1x_2x_3,$$
$$q_3(x_1,x_2,x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3.$$

(i) Bestimmen Sie jeweils die zu q_i gehörende Bilinearform $s_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für $i = 1,2,3$, wenn sie existiert.

(ii) Berechnen Sie die Gramsche Matrix zur Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ und die Gramsche Matrix zur Basis $\{(1,1,1)^T, (1,-1,0)^T, (1,0,0)^T\}$ von s_1.

(iii) Berechnen Sie für s_1 den Ausartungsraum $V_0(s_1)$.

(iv) Berechnen Sie $rang(s_1)$.

Aufgabe 14 Gegeben seien die drei Relationen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$A \sim B :\Leftrightarrow \exists S,T \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ B = SAT,\ S,T \text{ regulär },$$
$$A \sim_a B :\Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ B = T^{-1}AT,\ T \text{ regulär },$$
$$A \sim_k B :\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ B = S^TAS,\ S \text{ regulär }.$$

(i) Zeigen Sie: $A \sim_a B \Rightarrow A \sim B$.

(ii) Zeigen Sie: $A \sim_k B \Rightarrow A \sim B$.

(iii) Gilt auch $A \sim_k B \Rightarrow A \sim_a B$?

Aufgabe 15 (5 Punkte) Es sei

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(i) Berechnen Sie $D(\varphi)\cdot D(\varphi)$, $D(\varphi)\cdot D(\varphi)^T$ und $D(\varphi)^T \cdot D(\varphi)$.

(ii) Zeigen Sie, dass zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ existiert mit

$$D(\varphi)^T \cdot A \cdot D(\varphi) = diag(\lambda_1, \lambda_2).$$

Tipp: Benutzen Sie, dass $\tan(2\varphi) = \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)}$, wenn $\cos(\varphi) \neq \pm\sin(\varphi)$ ist.

Aufgabe 16 (2 Punkte) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Weiter sei

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^H := (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}).$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ \varphi_A(x, y) = y^H A x$$

drei der vier Eigenschaften einer Bilinearform erfüllt und zusätzlich $\varphi_A(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\varphi_A(x, y)$.

Abgabe: Montag, 30.04.2012 bis 16 Uhr.