Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 30.04.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium
5. Übung

Aufgabe 17 (5 Punkte) Man betrachte für symmetrische Matrizen im $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Äquivalenzrelation

$$A \sim B :\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ regulär}: \ B = S^T AS.$$

Es sei $A = diag(4, -2, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass genau eine Matrix D vom Typ

$$D = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}, 0, \ldots, 0)$$

in derselben Äquivalenzklasse wie A liegt.

Aufgabe 18 Man betrachte dieselbe Äquivalenzrelation wie in Aufgabe 17.

(i) Gilt der Satz: Wenn $A \sim diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, so ist 0 Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit $n - r$?

(ii) Gilt der Satz: Wenn $A \sim diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$, so hat A genau $\#\{i \mid \alpha_i > 0\}$ positive Eigenwerte?

Aufgabe 19 (3 Punkte) Es sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Die Norm $\|\cdot\|$ ist definiert als $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Inverse Dreiecksungleichung: Für $v, w \in V$ gilt $\Big|\|v\| - \|w\|\Big| \leq \|v - w\|$.

Aufgabe 20 (7 Punkte)

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, wenn A die Signatur n hat, so ist A kongruent zu jeder Matrix B der Gestalt $B = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Es seien $(V, \langle , \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $v_1, \ldots, v_k \in V$. Zeigen Sie, dass dann gilt: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Matrix $M := (\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1}^k$ die Signatur k besitzt.

Abgabe: Montag, 07.05.2012 bis 16 Uhr.