Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 07.05.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium

6. Übung

Aufgabe 21 (4 Punkte) Gegeben sei die Gerade

$$L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Berechnen Sie $\gamma \in \mathbb{R}$ und $c^* \in \mathbb{R}^2$ mit $\|c^*\| = 1$ und $L = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle c^*, v\rangle = \gamma\}$.

(ii) Berechnen Sie zu $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Fußpunkt des Lots auf L und den Abstand $d(v_0, L)$.

Aufgabe 22 (7 Punkte) Gegeben sei die Gerade

$$L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Berechnen Sie $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und $c_1^*, c_2^* \in \mathbb{R}^3$ mit $\|c_1^*\| = \|c_2^*\| = 1$, $\langle c_1^*, c_2^*\rangle = 0$ und $L = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle c_1^*, v\rangle = \gamma_1,\ \langle c_2^*, v\rangle = \gamma_2\}$.

(ii) Berechnen Sie zu $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Fußpunkt des Lots auf L und den Abstand $d(v_0, L)$.

Aufgabe 23 Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ sei das Kreuzprodukt wie folgt definiert:

$$x \times y := \left(\det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right)^T.$$

(i) Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle x \times y, z\rangle = \det \begin{pmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\langle x \times y, x\rangle = 0$ und $\langle x \times y, y\rangle = 0$,

(b) $y \times x = -(x \times y)$,

(c) $\lambda x \times y = \lambda(x \times y) = x \times \lambda y$,

(d) Sind x und y linear abhängig, so ist $x \times y = 0$.

Aufgabe 24 (4 Punkte) Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ und $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen sind.

Abgabe: Montag, 14.05.2012 bis 16 Uhr.