Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 14.05.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium
7. Übung

Aufgabe 25 (3 Punkte) Eine Messung habe die folgenden Werte ergeben

i	1	2	3	4	5	6
x_i	-2	0	0	1	2	1
y_i	1	0	-1	0	0	1

Es sei $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

(i) Finden Sie a_0, a_1, a_2, a_3, so dass $\sum_{i=1}^{6}(p(x_i) - y_i)^2$ minimal wird.

(ii) Skizzieren Sie p.

Aufgabe 26 (8 Punkte)

(i) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bilden eines Basis des Raums $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie ausgehend von diesen drei Vektoren eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

(ii) Wenden Sie das Verfahren von Gram-Schmidt auf die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

an und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 27 (4 Punkte) Es sei $V_n := \{f \in \mathbb{R}[x] \mid Grad(f) \leq n\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Eine Basis von V_3 ist $B := \{1, x, x^2, x^3\}$. Berechnen Sie ausgehend von dieser Basis eine Orthonormalbasis von V_3.

Aufgabe 28 Es sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass die Gram-Matrix des Standard-Skalarprodukts bezüglich der Basis B genau $V^T \cdot V$ ist. Dabei ist $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n$.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit Signatur n. Zeigen Sie, dass $\langle x, y \rangle_A := x^T A y$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$ mit der Gram-Matrix $V^T A V$ bezüglich der Basis B ist.

Abgabe: Montag, 21.05.2012 bis 16 Uhr.