

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium

8. Übung

Aufgabe 29 (6 Punkte) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob A und B orthogonale Matrizen sind.

Aufgabe 30 (3 Punkte) Es sei $V_3 := \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \text{Grad}(f) \leq 3\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Die Funktionale $L_i : V_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ seien definiert als

- (i) $L_1(p) := p(1)$,
- (ii) $L_2(p) := p'(1)$, (mit $p'(x)$ Ableitung von $p(x)$)
- (iii) $L_3(p) := \int_{-1}^1 p(x)dx$

für alle $p \in V_3$. Berechnen Sie $q_1, q_2, q_3 \in V_3$, so dass $L_i(p) = \langle p, q_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$ für alle $p \in V_3$.

Aufgabe 31 Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Man betrachte das Minimierungsproblem

$$\min\{\|x\| : Ax = b\}.$$

- (i) Zeigen Sie, wenn für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $Ax = Ay = b$, so gilt auch $A\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) = b$.
- (ii) Zeigen Sie, wenn für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ gilt $Ax = Ay = b$ und $\|x\| = \|y\|$, so ist $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < \|x\|$.
- (iii) Benutzen Sie (i) und (ii), um zu zeigen, nur ein $z \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $Az = b$ und $\|z\| = \min\{\|x\| : Ax = b\}$.

Aufgabe 32 (6 Punkte) Bei Ausgrabungen fand man in drei Schichten Spuren von Menschen. Erste Messungen ergaben, dass Schicht 1 etwa 3,47 m unter dem heutigen Niveau liegt,

Schicht 2 etwa 2,01 m und Schicht 3 etwa 1,58 m. Zur Sicherheit hat man auch die Abstände untereinander gemessen. So waren Schicht 1 und 2 etwa 1,42 m auseinander, Schicht 1 und 3 etwa 1,92 m und Schicht 2 und 3 etwa 0,44 m. Verbessern Sie diese Messergebnisse mit der Methode der kleinsten Quadrate, indem Sie

- (i) zuerst das überbestimmte Gleichungssystem für die drei Unbekannten aufstellen,
- (ii) dann die Normalgleichungen bestimmen
- (iii) und schließlich diese lösen und das Ergebnis interpretieren.

Abgabe: Dienstag, 29.05.2012 bis 8.30 Uhr.