Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. H. M. Möller
Dipl.-Math. Katrin Siemko
Dipl.-Wirt.-Math. Tobias Springer

Dortmund, 29.05.2012

Lineare Algebra II für Lehramt Gymnasium
9. Übung

Aufgabe 33 (3 Punkte) Es seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ und $G(v_1, \dots, v_n)$ die Gram-Matrix

$$G(v_1, \dots, v_n) := (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^n$$

Zeigen Sie:

(i) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, so ist $\det(G(v_1, \dots, v_n)) = 0$.

(ii) Ist $v_n = u + u'$ mit $u, u' \in \mathbb{R}^n$, so ist
$\det(G(v_1, \dots, v_n)) = \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, u)) + \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, u'))$.

(iii) Es gilt $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)) = \lambda^2 \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))$.

Aufgabe 34 (6 Punkte) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$ und schätzen Sie die Determinanten mit der Hadamard-Ungleichung ab.

Aufgabe 35 (6 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in SO(2)$ vom Typ $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mit passendem $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist.

(ii) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 53 & -36 & -33 \\ -36 & 32 & 56 \\ -33 & 56 & 45 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A_1 = D_1^T A D_1$ und $A_2 = D_2^T A_1 D_2$ mit

$$D_1 := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

(iii) Berechnen Sie für A, A_1 und A_2 die Quadratsummen und die Summen der Quadrate der Hauptdiagonalelemente.

Aufgabe 36 Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ mit $a = (-\sqrt{3}, -1),\ b = (\sqrt{3}, -1),\ c = (0, 2)$. Geben Sie alle Matrizen $S \in SO(2)$ an, die die Menge $\{a, b, c\}$ auf sich selbst abbilden.

Abgabe: Montag, 04.06.2012 bis 16 Uhr.