

Approximationstheorie

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Der Bernstein-Operator und die Sätze von Weierstraß und Korovkin	5
3	Approximation in normierten Räumen	17
4	Approximation im Hilbertraum	22
4.1	Best-Approximation und Orthogonal-Projektion	22
4.2	Der Hilbertraum $L^2(0, 1)$	26
5	Approximation in $C_*[0, 1]$	36
5.1	Jackson-Sätze	39
5.2	Umkehrsätze	47
5.3	Weitere Aussagen	52
6	Approximation in $C[a, b]$	53
6.1	Timan-Sätze	54
6.2	Sätze von Ditzian und Totik	59
6.3	Aussagen zum Bernstein-Operator	60
6.4	Markoff- und Bernstein-Ungleichungen	61
7	Charakterisierung der Bestapproximation	63
7.1	Charakterisierung der Bestapproximation in $L^p(D)$	67
7.2	Charakterisierung der Bestapproximation in $C(K)$	70
7.3	Bestapproximation mit Haarschen Räumen	75
7.3.1	Haarsche Räume und der Eindeigkeitssatz von Haar	75
7.3.2	Existenz positiver Funktionen	81
7.3.3	Charakterisierung des Proximums	85
8	Remez-Algorithmus	89

1 Einführung

Die Approximationstheorie hat das Ziel, zu gegebenen Funktionen (oder diskreten Daten oder ganzen Funktionsklassen) Methoden zur Konstruktion einfacher Funktionen anzugeben, die die gegebenen Funktionen gut approximieren und eventuell weitere Eigenschaften, wie z.B. Monotonie, erhalten.

1.1 Beispiel. Als einfaches Beispiel zur Einführung wollen wir drei verschiedene Methoden zur Approximation der Funktion

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (\text{mit festem } a > 1)$$

durch Polynome vom Grad n angeben.

a) **Taylorentwicklung.**

f besitzt im Intervall $[-1, 1] \subset (-a, a)$ die Taylorentwicklung (mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$)

$$f(x) = \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a(1-\frac{x}{a})} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{a^{k+1}}.$$

Das n -te Taylorpolynom ist also gegeben durch

$$p_n^{(T)}(f, x_0, x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{a^{k+1}}. \quad (1.1)$$

Die Maximumsnorm der Fehlerfunktion $f - p_n^{(T)}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ ergibt sich als

$$\|f - p_n^{(T)}\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{a^{k+1}} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{k+1}} = \frac{a^{-n-1}}{a-1} =: E_n^{(T)}(f). \quad (1.2)$$

b) **Orthogonalentwicklung nach Chebychev-Polynomen.**

Die Chebychev-Polynome sind definiert durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1].$$

Sie können auch rekursiv bestimmt werden durch

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

das heißt die Chebyshev-Polynome sind paarweise orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle_C = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) g(x) dx, \quad f, g \in C[-1, 1].$$

Die Orthogonalprojektion von $C[-1, 1]$ auf den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ wird in der Numerik als Gauß-Chebyshev-Approximation bezeichnet. Sie liefert für $f \in C[-1, 1]$ das Polynom

$$p_n^{(C)} = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, T_k \rangle_C}{\langle T_k, T_k \rangle_C} T_k.$$

Für das gegebene f erhalten wir $p_n^{(C)}$ mit dem folgenden Trick, ohne die inneren Produkte auszurechnen. Man findet im “Handbook of Mathematical Functions” von Abramowitz und Stegun (Seite 783) die erzeugende Funktion der Chebyshev-Polynome

$$\frac{1-z^2}{1-2xz+z^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k T_k(x) \quad (1.3)$$

für alle $|x| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Setzen wir $z = \beta = a - \sqrt{a^2 - 1} \in (0, 1)$ (wegen $a > 1$), so ist

$$1+z^2 = 2az, \quad 1-z^2 = 2-az, \quad \frac{1-a\beta}{\beta(a-x)} = 1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k T_k(x). \quad (1.4)$$

Dies ergibt für die Orthogonalprojektion von $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a-x}$:

$$p_n^{(C)}(x) = \frac{\beta}{1-a\beta} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \beta^k T_k(x) \right). \quad (1.5)$$

Der Fehler lässt sich sowohl in der vom Skalarprodukt induzierten Norm als auch in der Maximumsnorm angeben. Beachtet man noch

$$\frac{\beta}{1-a\beta} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}},$$

so ist

$$\begin{aligned} \|f - p_n^{(C)}\|_C &= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \left\| 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta^k T_k \right\|_C \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \left(4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta^{2k} \underbrace{\|T_k\|_C^2}_{=\pi^2/4} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \frac{\beta^{n+1}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \|f - p_n^{(C)}\|_\infty &= \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta^k T_k(x) \right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta^k \\ &= \frac{2\beta^{n+1}}{\sqrt{a^2 - 1}(1 - \beta)} =: E_n^{(C)}(P). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Hinweis: $\|f - p_n^{(C)}\|_C = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_C$

c) Bestapproximation von f auf $[-1, 1]$ bzgl. der Maximumsnorm

Die Bestapproximation an f ist definiert als Polynom $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ mit

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty.$$

Mit Hilfe des Alternantensatzes lässt sich für das gegebene f beweisen (siehe G. Meinardus, "Approximationstheorie")

$$\frac{1}{a-x} - p_n^*(x) = -\frac{M}{2} \left[v^n \frac{\beta-v}{1-\beta v} + v^{-n} \frac{1-\beta v}{\beta-v} \right], \quad (1.7)$$

wobei $\beta = a - \sqrt{a^2 - 1}$ wie oben und $v \in \mathbb{C}$ durch $|v| = 1$ und $x = \operatorname{Re}(v) = \frac{1}{2}(v + \frac{1}{v})$ gegeben ist. Damit ist also $T_n(x) = \frac{1}{2}(v^n + v^{-n})$ und $\left| \frac{\beta-v}{1-\beta v} \right| = 1$. Die Konstante M ist

$$M = \|f - p_n^*\|_\infty = \frac{\beta^n}{a^2 - 1} =: E_n^*(f). \quad (1.8)$$

Insgesamt gilt also

$$E_n^*(f) < E_n^{(C)}(f) = \underbrace{\frac{2\beta\sqrt{a^2-1}}{1-\beta}}_{=1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}} E_n^*(f) < E_n^{(T)}(f).$$

Wir halten die folgenden Beobachtungen fest:

1. Die Methoden in Beispiel 1.1 lassen sich auf beliebige Funktionen in $C[-1, 1]$ (bzw. $C^n[-1, 1]$) anwenden. Dabei sind a) und b) lineare Methoden, d.h. für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $f_1, f_2 \in C[-1, 1]$ ist $p_n^{(C)}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 p_n^{(C)}(f_1) + c_2 p_n^{(C)}(f_2)$. Hingegen ist die Methode c) der Bestapproximation in der Maximumsnorm nicht-linear!
2. Bei allen drei Methoden liegt lineare Konvergenzordnung vor, d.h. für $n \rightarrow \infty$ gilt jeweils $E_n = O(q^n)$ mit einem $0 < q < 1$. Der Wert von q ist bei b) und c) der gleiche, nämlich $q = \beta = a - \sqrt{a^2 - 1}$, bei a) ist $q = 1/a$. Abbildung 1.1 zeigt nochmals die schnellere Konvergenz (kleineres q) bei b) und c) gegenüber der Taylorentwicklung a).

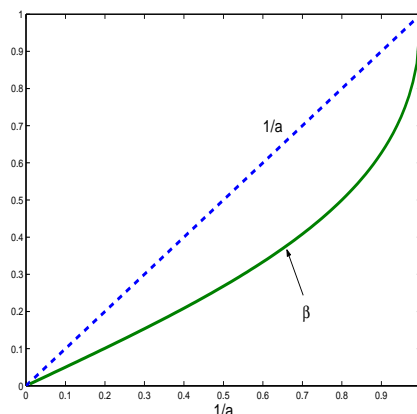


Abbildung 1.1: Vergleich der Konvergenzfaktoren $1/a$ bzw. β

Weitere Fragestellungen der Approximationstheorie sind: Existenz, Eindeutigkeit und eventuell die Charakterisierung der Approximierenden.

Wozu sollte man die einfache rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{a-x}$ überhaupt approximieren? Eine praktische Anwendung ergibt sich für die Invertierung von Matrizen.

1.2 Anwendung zur Matrixinversion. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch mit Eigenwerten in $[-1, 1]$. Gesucht ist die Inverse $(a \text{Id} - A)^{-1}$ für $a > 1$.

A besitzt eine Spektralzerlegung

$$A = \sum_{k=1}^m \lambda_k v_k v_k^\top,$$

wobei (v_1, \dots, v_m) eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^m aus Eigenvektoren von A ist. Für jedes Polynom p gilt

$$p(A) = \sum_{k=1}^m p(\lambda_k) v_k v_k^\top,$$

für die gesuchte Inverse gilt

$$(a \text{Id} - A)^{-1} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{a - \lambda_k} v_k v_k^\top.$$

Deshalb sind die Matrizen

$$p_n^{(T)}(A), \quad p_n^{(C)}(A), \quad p_n^*(A)$$

jeweils Approximationen von $(a \text{Id} - A)^{-1}$. Die Berechnung von

$$p_n^{(C)}(A) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \beta^k T_k(A) \right)$$

kann rekursiv erfolgen, dies führt zu sogenannten “semi-iterativen” Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen in der Numerik.

2 Der Bernstein-Operator und die Sätze von Weierstraß und Korovkin

1

Ein einfaches Beispiel eines Approximationsverfahrens auf dem Raum $C([0, 1])$ liefert der Bernstein-Operator

$$B_n : C([0, 1]) \longrightarrow \mathcal{P}_n, \quad (B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (2.1)$$

2.1 Notation. • Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$

$$\mathcal{P}_n := \text{Span}(e_0, \dots, e_n)$$

mit den Monomen $e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $e_k(x) = x^k$. Für die Einschränkung auf Teilmengen $I \subset \mathbb{R}$ verwenden wir die gleichen Bezeichnungen.

- Die Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ sei kompakt. Der Vektorraum $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} : f \text{ stetig}\}$ wird versehen mit der **Maximumsnorm**

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty, K} := \max_{x \in K} |f(x)|,$$

und ist damit ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). (Die Maximumsnorm induziert die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.)

- Ein linearer Operator $B : C(K) \rightarrow C(K)$ besitzt die **Operatornorm**

$$\|B\| = \sup_{f \in C(K), \|f\|_\infty \leq 1} \|Bf\|_\infty = \sup_{f \in C(K), \|f\|_\infty = 1} \|Bf\|_\infty.$$

2.2 Definition. Sei $n \geq 1$ und $0 \leq k \leq n$. Die Funktionen

$$p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

heißen **Bernstein-Grundpolynome**. Zusätzlich definieren wir $p_{0,0} \equiv 1$ sowie $p_{n,k} \equiv 0$ für $k > n$ oder $k < 0$.

2.3 Eigenschaften. a) Die Menge $\{p_{n,k} : 0 \leq k \leq n\}$ bildet für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von \mathcal{P}_n , denn es gilt

$$\begin{pmatrix} p_{n,0} \\ \vdots \\ p_{n,n} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

mit den Monomen e_k und der regulären oberen Dreiecksmatrix $T = (t_{jk})_{j=0, \dots, n}$,

$$t_{jk} = (-1)^{k-j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{n}{k}, \quad k \geq j.$$

¹Sergei Natanowitsch Bernstein, russischer Mathematiker 1880-1968; Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, deutscher Mathematiker 1815-1897; Pavel Korovkin, russischer Mathematiker, 1913-1985

b) Für alle $x \in [0, 1]$ ist $p_{n,k} \geq 0$, für $x \in (0, 1)$ sogar $p_{n,k}(x) > 0$.

c) **Endpunkte:** Es gilt $p_{n,k}(0) = \delta_{0,k}$, $p_{n,k}(1) = \delta_{n,k}$.

d) **Symmetrie:** Es gilt $p_{n,k}(x) = p_{n,n-k}(1-x)$.

e) **Rekursion:** Es gilt

$$p_{n,k}(x) = (1-x)p_{n-1,k}(x) + xp_{n-1,k-1}(x).$$

f) **Rekursion der Ableitung:** Es gilt

$$p'_{n,k}(x) = n(p_{n-1,k-1} - p_{n-1,k}).$$

Das Polynom $p_{n,k}$ nimmt auf dem Intervall $[0, 1]$ sein globales Maximum an der Stelle $\frac{k}{n}$ an, ist monoton wachsend in $[0, \frac{k}{n}]$ und monoton fallend in $[\frac{k}{n}, 1]$.

2.4 de Casteljau-Algorithmus. Die Rekursion 2.3(e) wird zur Auswertung eines Polynoms

$$p = \sum_{k=0}^n b_k p_{n,k}$$

an der Stelle $t \in \mathbb{R}$ verwendet. Für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^n b_k p_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^n b_k ((1-t)p_{n-1,k}(t) + tp_{n-1,k-1}(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{((1-t)b_k + tb_{k+1})}_{=b_k^{(1)}(t)} p_{n-1,k}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}(t) p_{n-1,k}(t) = \dots \\ &= b_0^{(n)}(t) \end{aligned}$$

mit den rekursiv definierten ‘‘Koeffizienten’’

$$b_k^{(m)}(t) = (1-t)b_k^{(m-1)}(t) + tb_{k+1}^{(m-1)}(t), \quad b_k^{(0)}(t) = b_k. \quad (2.2)$$

Diesen Algorithmus versteht man am besten in der Version für parametrische Kurven, wobei $b_k \in \mathbb{R}^2$ Vektoren sind, die sog. Kontrollpunkte der Kurve $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Für $t \in [0, 1]$ definiert die Rekursion (2.2) den Punkt $b_k^{(m)}(t)$ auf der Verbindungsstrecke der Punkte $b_k^{(m-1)}(t)$ und $b_{k+1}^{(m-1)}(t)$. Dies ist im Fall $n = 3$ dargestellt in Abbildung 2.1. Schließlich ist $p(t) = b_0^{(n)}(t)$ der zu bestimmende Punkt der Kurve. (Weitere Eigenschaft: die Tangente in diesem Punkt ist $p'(t) = n(b_1^{(n-1)}(t) - b_0^{(n-1)}(t))$.)

Dieser Algorithmus ist numerisch extrem stabil, da nur Konvex-Kombinationen von Punkten gebildet werden. Damit ist bereits bewiesen, dass die Punkte $p(t)$ der Kurve in der konvexen Hülle der ‘‘Kontrollpunkte’’ b_k liegen.

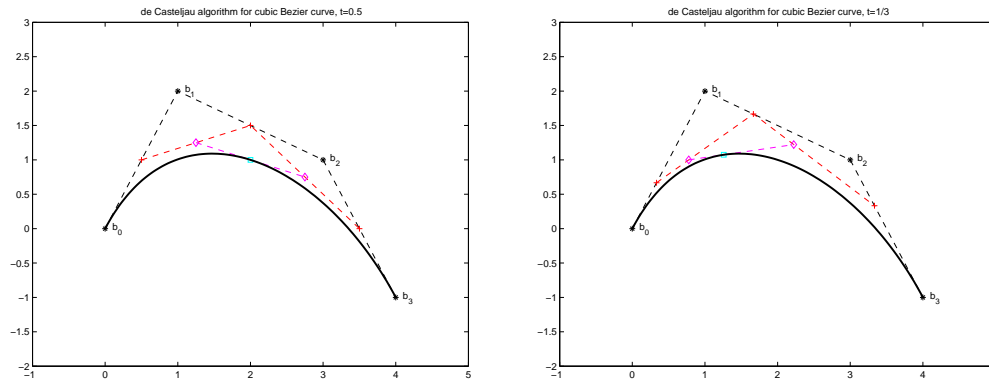


Abbildung 2.1: de Casteljau-Algorithmus für eine kubische Kurve; Auswertung bei $t = 1/2$ (links) und $t = 1/3$ (rechts)

Als Vorbereitung zu den Approximationsaussagen beweisen wir noch folgende Eigenschaft.

2.5 Lemma. Für $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\binom{k}{j} = 0$, falls $j < 0$ oder $j > k$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} p_{n,k}(x) = \binom{n}{m} x^m.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{k}{m} p_{n,k}(x) &= \sum_{k=m}^n \underbrace{\binom{k}{m} \binom{n}{k}}_{=\binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \binom{n}{m} x^m \sum_{k=m}^n \binom{n-m}{k-m} x^{k-m} (1-x)^{(n-m)-(k-m)} \\ &= \binom{n}{m} x^m \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} x^k (1-x)^{n-m-k} \\ &= \binom{n}{m} x^m \underbrace{(x + (1-x))^{n-m}}_{=1}. \end{aligned}$$

□

2.6 Definition. Der Bernstein-Operator $B_n : C[0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_n$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$B_n f := B_n(f) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}.$$

2.7 Eigenschaften. a) B_n ist ein linearer Operator: $B_n(\alpha f + \beta g) = \alpha B_n f + \beta B_n g$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C[0, 1]$.

b) **Endpunktinterpolation:** Es gilt

$$\begin{aligned} B_n f(0) &= f(0) && \text{(wegen } p_{n,k}(0) = \delta_{k,0}\text{),} \\ B_n f(1) &= f(1) && \text{(wegen } p_{n,k}(1) = \delta_{k,n}\text{).} \end{aligned}$$

c) **Reproduktion linearer Polynome:** Es gilt

$$\sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} p_{n,k}(x) = x,$$

also $B_n p = p$ für alle $p \in \mathcal{P}_1$. (Nachweis mit Lemma 2.5)

d) **Positivität und Monotonie:**

- Für $f \geq 0$ (das heißt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 1]$) ist $B_n f \geq 0$ auf $[0, 1]$. Dies ist (wegen der Linearität von B_n) gleichbedeutend mit
- Aus $g \geq f$ folgt $B_n g \geq B_n f$ auf $[0, 1]$.

e) B_n ist ein beschränkter Operator, seine Operatornorm ist

$$\|B_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|B_n f\|_\infty = \|B_n e_0\|_\infty = \|e_0\|_\infty = 1.$$

Hier wurde Eigenschaft d) für $|f(x)| \leq e_0(x) = 1$ genutzt.

f) Es gilt

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right)}_{=\Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)} p_{n-1,k}(x),$$

und für höhere Ableitungen $1 \leq \ell \leq n$

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} (B_n f)(x) = \frac{n!}{(n-\ell)!} \sum_{k=0}^{n-\ell} \Delta_{\frac{1}{n}}^\ell f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n-\ell,k}(x)$$

mit den Differenzen ℓ -ter Ordnung

$$\Delta_h^\ell f(y) = \Delta_h(\Delta_h^{\ell-1} f)(y) = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^{\ell-j} f(y + jh).$$

Das folgende Resultat erklärt den “Fehler” $B_n f(x) - f(x)$, den der Bernstein-Operator B_n an der Stelle x für ein Polynom f mit der s -fachen Nullstelle x liefert. Zu erwarten ist eine rasche Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ gegen $0 = f(x)$, weil ja f für großes s sehr kleine Funktionswerte hat.

2.8 Lemma (Momente des Bernstein-Operators). Für $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [0, 1]$ sei

$$T_{n,s}(x) = B_n [(\cdot - x)^s](x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^s p_{n,k}(x).$$

a) Es gilt

$$\begin{aligned} T_{n,0}(x) &= 1, & T_{n,1}(x) &= 0, \\ T_{n,2}(x) &= \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}, \\ T_{n,3}(x) &= \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}, & |T_{n,3}(x)| &\leq \frac{\sqrt{3}}{18n^2}, \\ T_{n,4}(x) &= \frac{(x(1-x))^2}{n^2} \left(3 - \frac{6}{n}\right) + \frac{x(1-x)}{n^3} \leq \begin{cases} \frac{1}{12}, & n = 1, \\ \frac{3}{16n^2} - \frac{1}{8n^3}, & n \geq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

und allgemein: für $s \in \mathbb{N}_0$ existieren $A_s, B_s > 0$ so, dass für alle $x \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq T_{n,2s}(x) \leq \frac{A_s}{n^s}, \quad 0 \leq |T_{n,2s+1}(x)| \leq \frac{B_s}{n^{s+1}}.$$

b) Für festes $x \in [0, 1]$ und $\delta > 0$ sei

$$I_x(\delta) := \left\{ k : 0 \leq k \leq n, \quad \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \right\}.$$

Dann gilt mit A_s wie oben

$$\sum_{k \in I_x(\delta)} p_{n,k}(x) \leq \frac{A_s}{n^s \delta^{2s}}.$$

Beweis. Die Darstellung von $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$ folgt aus Lemma 2.5. Für $s \in \mathbb{N}$ zeigt man die weiteren Eigenschaften mit der Rekursion

$$T_{n,s+1}(x) = \frac{x(1-x)}{n} (T'_{n,s}(x) + sT_{n,s-1}(x)).$$

Die Aussage b) folgt direkt aus a), denn

$$\sum_{k \in I_x(\delta)} p_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in I_x(\delta)} \frac{\left(\binom{k}{n} - x\right)^{2s}}{\delta^{2s}} p_{n,k}(x) \leq \frac{1}{\delta^{2s}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^{2s} p_{n,k}(x).$$

□

Der Weierstraß'sche Approximationssatz gibt eine qualitative Aussage zur Approximation stetiger Funktionen. Der Beweis von S. N. Bernstein aus dem Jahr 1911 benutzt die Folge der Bernstein-Operatoren B_n .

2.9 Satz (Satz von Weierstraß 1885). *Die Polynome liegen dicht in $C([a, b])$, das heißt für jedes $f \in C([a, b])$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom p mit $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.*

Beweis. Gegeben sei $f \in C([a, b])$ und $\varepsilon > 0$. O.B.d.A. sei $[a, b] = [0, 1]$ (sonst: affine Transformation $x = a + t(b - a)$).

Schritt 1. Weil $[0, 1]$ kompakt ist, ist f auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig. Wähle $\delta > 0$ mit

$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \delta$.

Schritt 2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$. Mit der Indexmenge $I_x(\delta)$ aus Lemma 2.8(b) ist

$$\begin{aligned}
 |f(x) - B_n f(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) p_{n,k}(x) \right| \quad (\text{Teilung der Eins}) \\
 &\leq \sum_{k \notin I_x(\delta)} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ da } \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta} p_{n,k}(x) + \sum_{k \in I_x(\delta)} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|}_{\leq 2 \|f\|_\infty} p_{n,k}(x) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin I_x(\delta)} p_{n,k}(x) + 2 \|f\|_\infty \sum_{k \in I_x(\delta)} p_{n,k}(x) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_\infty \frac{1}{2n\delta^2}. \quad (\text{Lemma 2.8 b})
 \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f\|_\infty \frac{1}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt dann $|f(x) - B_n f(x)| < \varepsilon$. □

Im nächsten Schritt wollen wir quantitative Aussagen herleiten, die die Konvergenzgeschwindigkeit (in Abhängigkeit des Polynomgrads) angeben. Dazu wird ein genaueres Maß für die gleichmäßige Stetigkeit von f eingeführt.

2.10 Definition (Stetigkeitsmodul). Für $f \in C([a, b])$ und $h > 0$ sei

$$\omega(f, h) = \sup_{0 < t \leq h} \sup_{x \in [a, b-t]} |f(x+t) - f(x)| = \sup_{x, y \in [a, b], |x-y| \leq h} |f(x) - f(y)|$$

der Stetigkeitsmodul (1. Ordnung) von f .

2.11 Eigenschaften (Eigenschaften von $\omega(f, h)$). a) Es ist $\omega(f, h) \geq 0$, und es gilt $\omega(f, h) = 0$ genau dann, wenn f konstant ist.

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(f, h) = 0$, da f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ ist.

c) Für $f_1, f_2 \in C([a, b])$ folgt

$$\omega(f_1 + f_2, h) \leq \omega(f_1, h) + \omega(f_2, h).$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\omega(\alpha f, h) = |\alpha| \omega(f, h).$$

d) $\omega(f, h)$ ist monoton wachsend bzgl. $h > 0$; für $h_1, h_2 > 0$ ist

$$\omega(f, h_1 + h_2) \leq \omega(f, h_1) + \omega(f, h_2).$$

Daraus folgt sofort $\omega(f, kh) \leq k\omega(f, h)$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie

$$\omega(f, \lambda h) \leq \lceil \lambda \rceil \omega(f, h), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

e) Falls $\omega(f, h) = \mathbf{o}(h)$ für $h \rightarrow 0$ gilt (das heißt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(f, h)}{h} = 0$), so ist f konstant.

Beweis: der Differentialquotient existiert an jeder Stelle und ist 0.

f) Ist f Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L , so gilt $\omega(f, h) \leq L h$.

2.12 Satz (Popoviciu² 1935). Für $f \in C([0, 1])$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{5}{4} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 2.9 erhalten wir für $x \in [0, 1]$ und beliebiges $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| p_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k \notin I_x(\delta)} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|}_{\leq \omega(f, \delta)} p_{n,k}(x) + \sum_{k \in I_x(\delta)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| p_{n,k}(x). \end{aligned}$$

Für $k \in I_x(\delta)$ verwende $\lambda_k := \frac{|x - \frac{k}{n}|}{\delta} \geq 1$ sowie $[\lambda_k] \leq 1 + \lambda_k \leq 1 + \lambda_k^2$. Dann folgt

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \omega(f, \lambda_k \delta) \leq (1 + \lambda_k^2) \omega(f, \delta).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n f(x)| &\leq \omega(f, \delta) \left(\underbrace{\sum_{k=0}^n p_{n,k}(x)}_{=1} + \underbrace{\sum_{k \in I_x(\delta)} \lambda_k^2 p_{n,k}(x)}_{\leq \delta^{-2} T_{n,2}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}} \right) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{4n\delta^2} \right) \omega(f, \delta). \end{aligned}$$

Mit der Wahl $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ folgt die Behauptung. \square

2.13 Bemerkung. a) Die Abschätzung in 2.12 kann hinsichtlich der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ im Stetigkeitsmodul nicht verbessert werden.

Beispiel: $f \in C[0, 1]$, $f(x) = |x - 1/2|$ hat den Stetigkeitsmodul $\omega(f, \delta) = \delta$ für beliebiges $\delta < 1/2$, und speziell bei $x = 1/2$ ist

$$|f(1/2) - B_n f(1/2)| = B_n f(1/2) = 2^{-n} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}.$$

b) Die bestmögliche Konstante $C > 0$ in der universellen Fehlerabschätzung

$$\|f - B_n f\| \leq C \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{für alle } f \in C[0, 1]$$

²Tiberiu Popoviciu, rumänischer Mathematiker, 1906-1975

wurde von P. C. Sikkema in *Numerische Math.* 3 (1961), S. 107-116, gefunden; es ist

$$C_{\text{opt}} = \sup_{f \in C[0,1] \setminus \mathcal{P}_1} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f - B_n f\|_{\infty}}{\omega(f, 1/\sqrt{n})} = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} \approx 1.0898873.$$

Interessanterweise wird diese Konstante für den Grad $n = 6$ erzielt, das heißt

$$C_{\text{opt}} = \sup_{f \in C[0,1] \setminus \mathcal{P}_1} \frac{\|f - B_6 f\|_{\infty}}{\omega(f, 1/\sqrt{6})}.$$

Der Beweis verwendet ähnliche Methoden wie in Satz 2.12; dabei wird eine sehr genaue Abschätzung der Summe in

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \omega(f, \delta) \left(1 + \delta^{-1} \sum_{k \in I_x(\delta)} |x - k/n| p_{n,k}(x) \right)$$

vorgenommen.

- c) Für $f \in C^1([0, 1])$ kann man durch Anwendung des Mittelwertsatzes und der Rekursionsformel der Ableitung sogar

$$\|f - B_n f\|_{\infty} \leq \frac{3}{4\sqrt{n}} \omega\left(f', \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

zeigen. Falls also f' Lipschitzstetig ist, folgt daraus

$$\|f - B_n f\|_{\infty} \leq \frac{3L}{4n},$$

das ist die Konvergenzrate $\mathcal{O}(n^{-1})$.

Beweis (s. Lorentz, *Bernstein polynomials*, 1953, S. 21): in der Summation von $f(x) - B_n f(x)$ wie im Beweis von Satz 2.12 ist

$$f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(\xi_k) = \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x) + \left(x - \frac{k}{n}\right) (f'(\xi_k) - f'(x))$$

mit einem ξ_k zwischen x und k/n . Durch Summation über k fällt der erste Term der rechten Seite weg (Lemma 2.8), für den zweiten Term ergibt $\left|\frac{\xi_k - x}{\delta}\right| \leq \left|\frac{k/n - x}{\delta}\right| = \lambda_k$

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n f(x)| &\leq \omega(f', \delta) \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| (1 + \lambda_k) p_{n,k}(x) \\ &\leq \omega(f', \delta) \left(\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| p_{n,k}(x) + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^2 p_{n,k}(x) \right). \end{aligned}$$

Die letzte Summe hat die obere Schranke $\frac{1}{4n}$, die erste Summe wird mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abgeschätzt durch

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| p_{n,k}(x) \leq \left(\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right|^2 p_{n,k}(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{4n}}.$$

Mit $\delta = 1/\sqrt{n}$ folgt die gewünschte Abschätzung.

d) Später wird gezeigt, dass die bestmögliche Approximation durch \mathcal{P}_n den Fehler

$$E_n(f) = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_\infty \leq c \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

besitzt. Deshalb sind die Bernstein-Operatoren nicht optimal.

Die Aussage in 2.13 c) legt es nahe, zu untersuchen, für welche Funktionen die Ordnung $\|f - B_n f\|_\infty = \mathbf{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ übertroffen werden kann. Dass dies nur für lineare Polynome $f \in \mathcal{P}_1$ passiert, für die ja sogar $f - B_n f \equiv 0$ gilt, nennt man **Saturation**.

2.14 Satz (Voronovskaya 1932). *Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und besitze an einer Stelle $x \in [0, 1]$ die erste und zweite Ableitung. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x) - B_n f(x)) = -\frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Beweis. Die Taylorentwicklung von f um x ergibt

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + (y-x)^2 \left(\frac{f''(x)}{2} + \gamma(y) \right),$$

und das Restglied γ ist eine beschränkte Funktion mit $\lim_{y \rightarrow x} \gamma(y) = 0$.

Also ergibt sich durch Einsetzen von $y = \frac{k}{n}$

$$\begin{aligned} B_n f(x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n f(x) p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x) p_{n,k}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{f''(x)}{2} p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \gamma\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \\ &= f(x) + 0 + \frac{f''(x)}{2} \frac{x(1-x)}{n} + r_n(x). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$|r_n(x)| = |B_n((\cdot - x)^2 \gamma)(x)| \leq B_n((\cdot - x)^2 |\gamma|)(x).$$

Zu zeigen bleibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n r_n(x) = 0.$$

Wir verwenden die Lokalisierungstechnik wie in 2.12, hier aber mit dem 4. Moment $T_{n,4}$:

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$

- wähle $\delta > 0$ mit $|\gamma(y)| < \varepsilon$ für $|y - x| < \delta$
- wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{A_2 \|\gamma\|_\infty}{\delta^4 n_0} < \varepsilon$ mit A_2 aus Lemma 2.8.

Dann folgt mit $I_x(\delta)$ in Lemma 2.8 für alle $n \geq n_0$

$$n \sum_{k \notin I_x(\delta)} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \underbrace{\left| \gamma\left(\frac{k}{n} - x\right) \right|}_{< \varepsilon} p_{n,k}(x) < \varepsilon n \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{n,k}(x) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

sowie

$$n \sum_{k \in I_x(\delta)} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \underbrace{\left| \gamma\left(\frac{k}{n} - x\right) \right|}_{\leq \|\gamma\|_\infty} p_{n,k}(x) \leq n \|\gamma\|_\infty \sum_{k \in I_x(\delta)} p_{n,k}(x) \stackrel{2.8}{\leq} n \|\gamma\|_\infty \frac{A_2}{\delta^4 n^2} < \varepsilon.$$

Also ist $n|r_n(x)| < \frac{5}{4}\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. □

2.15 Bemerkung. Satz 2.14 besagt: falls an der Stelle $x \in [0, 1]$ die zweite Ableitung von f ungleich 0 ist, so existiert eine Konstante $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - B_n f(x)| \geq \frac{c}{n}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Die Konvergenzrate $\mathbf{O}(n^{-1})$ kann also nur an Nullstellen von f'' überschritten werden!

2.16 Bernstein-Operatoren auf $C([a, b])$. Mit der Koordinatentransformation

$$[0, 1] \ni x \mapsto t = a + x(b - a) \in [a, b]$$

erhalten wir die Knoten $t_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$ und definieren

$$B_n^{[a,b]} : C([a, b]) \longrightarrow P_n, \quad B_n^{[a,b]} f(t) = \sum_{k=0}^n f(t_k) p_{n,k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right). \quad (2.3)$$

Damit wird der Bernstein-Operator auch für Funktionen in $C[a, b]$ definiert.

Zusammenfassung:

$B_n : C([0, 1]) \longrightarrow P_n$ ist ein linearer Operator. Es gelten

1. die Fehlerabschätzungen

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{5}{4} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

und für $f \in C^1([0, 1])$ mit Lipschitz-stetiger Ableitung f' sogar

$$\|f - B_n f\|_\infty = \mathbf{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. die Saturations-Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (f(x) - B_n(f; x)) = -\frac{f''(x)}{2} x(1-x).$$

Zum Abschluss des Kapitels wird die **Positivität** der Bernstein-Operatoren B_n noch einmal in den Vordergrund gestellt. Die Approximationsaussage in Satz 2.9 wird erneut bewiesen, indem nur die Approximation der ersten Monome e_0 , e_1 und e_2 benutzt wird.

2.17 Definition (Positive lineare Operatoren). *Ein linearer Operator $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ heißt positiv, falls*

$$Kf \geq 0 \quad \text{für alle } f \in C[a, b] \text{ mit } f \geq 0$$

gilt. Dabei bedeutet $f \geq 0$, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt ist.

Man nennt K auch monoton, weil mit der Linearität

$$Kf \geq Kg \quad \text{für alle } f, g \in C[a, b] \text{ mit } f \geq g$$

gilt.

2.18 Satz (Satz von P. P. Korovkin, 1953). *Es sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver linearer Operatoren $K_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$. Falls*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_j - K_n e_j\| = 0 \quad \text{für die drei Monome } e_0, e_1, e_2$$

gilt, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - K_n f\| = 0 \quad \text{für alle } f \in C[a, b].$$

Beweis. Schritt 1. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $|x - y| < \delta$ (gleichmäßige Stetigkeit von f). Dann gilt die globale Abschätzung (auch für großes $|x - y|$)

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \left(\frac{x - y}{\delta} \right)^2.$$

Für beliebige $x, y \in [a, b]$ ist also

$$\underbrace{f(y) - \varepsilon - 2\|f\|_\infty \left(\frac{x - y}{\delta} \right)^2}_{=p_y(x) \in \mathcal{P}_2} \leq f(x) \leq \underbrace{f(y) + \varepsilon + 2\|f\|_\infty \left(\frac{x - y}{\delta} \right)^2}_{=q_y(x) \in \mathcal{P}_2}.$$

Schritt 2. Die Koeffizienten der Polynome $p_y(x) = a_y + b_y x + c_y x^2$ lauten

$$a_y = f(y) - \varepsilon - \frac{2\|f\|_\infty y^2}{\delta^2}, \quad b_y = \frac{4\|f\|_\infty y}{\delta^2}, \quad c_y = -\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}.$$

Sie sind gleichmäßig (für alle $y \in C[a, b]$) beschränkt, denn mit $r = \max\{|a|, |b|\}$ ist

$$\sup_{y \in [a, b]} |a_y| \leq \|f\|_\infty + \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty r^2}{\delta^2}, \quad \text{etc.}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|p_y - K_n p_y\|_\infty \leq \sup_{y \in [a, b]} |a_y| \|e_0 - K_n e_0\| + \sup_{y \in [a, b]} |b_y| \|e_1 - K_n e_1\| + \sup_{y \in [a, b]} |c_y| \|e_2 - K_n e_2\|,$$

also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|p_y - K_n p_y\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0, \quad y \in [a, b].$$

Die gleiche Beziehung folgt für die quadratischen Polynome q_y .

Schritt 3. Für beliebiges $y \in [a, b]$ ergibt $p_y \leq f \leq q_y$ sowie die Monotonie von K_n

$$K_n p_y \leq K_n f \leq K_n q_y \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Verwendung der Abschätzungen im 2. Schritt ergibt hieraus

$$p_y - \varepsilon \leq K_n f \leq q_y + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Damit erfüllt die Differenz $f - K_n f$ die Abschätzungen

$$p_y - q_y - \varepsilon \leq f - K_n f \leq q_y - p_y + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Werten wir dies an der Stelle x aus und setzen $y = x$, so erhalten wir wegen $q_x(x) - p_x(x) = 2\varepsilon$

$$-3\varepsilon \leq f(x) - K_n f(x) \leq 3\varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

also insgesamt $\|f - K_n f\|_\infty \leq 3\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. □

3 Approximation in normierten Räumen _____

Die folgenden Begriffe sind aus der Linearen Algebra und Analysis bekannt.

3.1 Definition (normierter Vektorraum über \mathbb{R} bzw. \mathbb{C}). Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . Dann heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ Norm, falls

1. $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $(\|v\| = 0 \iff v = 0)$ (Definitheit)

2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} (Homogenität)

3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$. (Dreiecksungleichung)

Ist $(V, \|\cdot\|)$ **vollständig** (im Sinne der Topologie), so heißt $(V, \|\cdot\|)$ **Banachraum**.

3.2 Beispiel. a) $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum

b) Sei $1 \leq p < \infty$ und

$$L^p(a, b) := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar, } |f|^p \text{ integrierbar}\}.$$

Funktionen f und g werden identifiziert (sind also “das gleiche Element” von $L^p(a, b)$), wenn $f(x) = g(x)$ fast überall, also $f(x) = g(x)$ außerhalb einer Menge vom Lebesgue-Maß 0 gilt. Mit der L^p -Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist $L^p(a, b)$ ein Banachraum.

c) Der Vektorraum $C[a, b]$ mit der L_2 -Norm ist ein normierter Raum, aber **kein** Banachraum. (Übungen)

3.3 Bemerkung. Die Normabbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, und sogar Lipschitzstetig, denn es gilt

4. $\left| \|v\| - \|w\| \right| \leq \|v - w\|$ (2. Dreiecksungleichung)

Wir beschreiben nun das Problem der **linearen Bestapproximation**, das in dieser Vorlesung intensiv behandelt wird.

3.4 Definition. Sei V ein normierter Vektorraum und $M \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Zu $f \in V$ heißt

- $E_M(f) := \inf_{v \in M} \|f - v\|$ der **Approximationsgrad** von f (bzgl. M),

- jedes Element $v^* \in M$ mit $\|f - v^*\| = E_M(f)$ **Proximum** (oder **Bestapproximation**) von f in M ,
- $\Pi_M(f) \subset M$ die Menge aller Proxima von f in M und
- $\Pi_M : V \rightarrow \mathcal{P}(M)$, $f \mapsto \Pi_M(f)$ die **metrische Projektion** von V auf M . Hierbei ist $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M .

Die Menge M heißt

- **Existenzmenge**, wenn zu jedem $f \in V$ mindestens ein Proximum $v^* \in M$ existiert,
- **Eindeutigkeitsmenge**, wenn zu jedem $f \in V$ höchstens ein Proximum $v^* \in M$ existiert,
- **Chebyshev-Menge**, wenn zu jedem $f \in V$ genau ein Proximum $v^* \in M$ existiert.

3.5 Bemerkung. $\Pi_M(f)$ kann für ein f leer sein, für ein anderes f unendlich viele Elemente enthalten.

3.6 Bemerkung. a) $\|f\|$ liefert auch eine Schranke für die Proxima: für jedes Proximum v^* gilt

$$\begin{aligned} \|v^*\| &= \|v^* - f + f\| \leq \|v^* - f\| + \|f\| \\ &= \|f\| + \inf_{v \in M} \|v - f\| \\ &\leq \|f\| + \|0 - f\| = 2\|f\|. \end{aligned}$$

b) Falls M eine Chebyshev-Menge ist, so ist die metrische Projektion auch als Abbildung von V nach M zu verstehen: $\Pi_M : V \rightarrow M$, $\Pi_M(f) = v^*$ mit $\|f - v^*\| = E_M(f)$.

Achtung: Im Allgemeinen ist diese Abbildung **nicht** linear.

3.7 Lemma. Für $f \in V$ ist die Menge $\Pi_M(f)$ konvex (oder leer).

Beweis. Falls $\Pi_M(f) \neq \emptyset$, wähle $v_1, v_2 \in \Pi_M(f)$ und setze $w := \alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2 \in M$ mit $\alpha \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\|f - w\| = \|\alpha(f - v_1) + (1 - \alpha)(f - v_2)\| \leq \alpha \underbrace{\|f - v_1\|}_{=E_M(f)} + (1 - \alpha) \underbrace{\|f - v_2\|}_{=E_M(f)} = E_M(f).$$

Also ist $w \in \Pi_M(f)$. □

3.8 Definition (Minimalfolge). Gegeben sei ein normierter Vektorraum V , sowie ein linearer Teilraum $M \subseteq V$ und eine Funktion $f \in V \setminus M$. Eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen $v_n \in M$ heißt **Minimalfolge**, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = \inf_{v \in M} \|f - v\| = E_M(f).$$

3.9 Lemma. a) Zu jedem $f \in V$ existiert eine Minimalfolge.

b) Der Approximationsgrad $E_M : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitzstetig: Es gilt

$$|E_M(f) - E_M(g)| \leq \|f - g\|$$

für alle $f, g \in V$.

Beweis. a) ist klar per Definition der Minimalfolge. Zu b):

Seien $f, g \in V$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen Minimalfolgen (v_n) zu f und (w_n) zu g , sowie $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$E_M(f) \leq \|f - v_n\| < E_M(f) + \varepsilon$$

$$E_M(g) \leq \|g - w_n\| < E_M(g) + \varepsilon$$

für $n \geq n_0$. Mit der 2. Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\|f - g\| \geq \|f - w_n\| - \|w_n - g\| \geq E_M(f) - E_M(g) - \varepsilon$$

$$\|f - g\| \geq \|g - v_n\| - \|v_n - f\| \geq E_M(g) - E_M(f) - \varepsilon.$$

Also ist

$$|E_M(f) - E_M(g)| \leq \|f - g\| + \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$ und damit folgt die Behauptung. □

3.10 Bemerkung (Vorbereitung zum Existenzsatz). In einem endlich-dimensionalen Vektorraum V sind alle Normen **äquivalent**, das heißt es gibt $\alpha, \beta > 0$, mit

$$\alpha \|v\|_I \leq \|v\|_{II} \leq \beta \|v\|_I$$

für alle $v \in V$, wobei $\|\cdot\|_I, \|\cdot\|_{II}$ beliebige Normen auf V sind.

Insbesondere ist V mit $\dim(V) = n$ isomorph zu $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

Normierte Vektorräume sind genau dann endlich-dimensional, wenn ihre Einheitskugel kompakt ist (Satz von Alaoglu).

3.11 Beispiel. Der Folgenraum $\ell^2(\mathbb{N})$ der quadrat-summierbaren Folgen mit dem Skalarprodukt

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \quad a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, \quad b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

ist unendlich-dimensional.

Für $j \in \mathbb{N}$ ist die Folge $e_j = (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ ein Element der Einheitskugel, denn $\|e_j\| = (\langle e_j, e_j \rangle)^{1/2} = 1$. Die Folge dieser Elemente $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt aber keine konvergente Teilfolge wegen $\|e_i - e_j\| = 2$ für alle $i \neq j$. Daran erkennt man, dass die Einheitskugel von $\ell^2(\mathbb{N})$ nicht kompakt ist.

3.12 Satz (Existenzsatz). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $M \subseteq V$ ein endlich dimensionaler Teilraum. Dann gilt $\Pi_M(f) \neq \emptyset$ für jedes $f \in V$.

Beweis. Sei (v_n) eine Minimalfolge zu f , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = E_M(f). \quad (3.1)$$

Wegen

$$\|v_n\| \leq \|v_n - f\| + \|f\|$$

und der Konvergenz von $(\|v_n - f\|)$ ist auch die Folge $(\|v_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Das heißt aber, dass die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt ist (in M). Weil M endlich-dimensional ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $v^* := \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k}$. Die Stetigkeit der Norm erlaubt den Grenzübergang

$$\|f - v^*\| = \|f - \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - v_{n_k}\| = E_M(f),$$

also ist v^* Proximum. □

In speziellen Banachräumen sind alle Teilräume Eindeutigkeitsmengen. Dies wird durch folgende Eigenschaft der Norm gesichert.

3.13 Definition (Strikt konvexer Raum). Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt **strikt konvex**, wenn für alle $f, g \in V$ mit $\|f\| = \|g\| = 1$ und $f \neq g$ sowie für alle $0 < \alpha < 1$ die Abschätzung

$$\|\alpha f + (1 - \alpha)g\| < 1$$

gilt.

3.14 Beispiel. a) Die euklidische Norm im \mathbb{R}^n ist strikt konvex. Veranschaulichung am Einheitskreis, Rechnung für $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$:

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|_2^2 = \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\langle x, y \rangle = 1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \langle x, y \rangle).$$

Für $\alpha \in (0, 1)$ ist der letzte Ausdruck nur dann 1, wenn $\langle x, y \rangle = 1$ gilt; dies ist auf Grund der Cauchy-Schwarz Ungleichung nur dann der Fall, wenn $x = y$ ist.

b) Die Maximums-Norm im \mathbb{R}^n ist nicht strikt konvex.

3.15 Satz (Eindeutigkeitsatz). Ist $(V, \|\cdot\|)$ strikt konvex und $M \subseteq V$ ein linearer Teilraum, so besitzt jedes $f \in V$ höchstens ein Proximum $v^* \in M$.

Beweis. 1. Fall: $E_M(f) = 0$, $v_1, v_2 \in \Pi_M(f)$. Dann ist $\|f - v_1\| = 0 = \|f - v_2\|$, also $v_1 = v_2 = f$.

2. Fall: $E_M(f) > 0$, $v_1, v_2 \in \Pi_M(f)$, $v_1 \neq v_2$. Wähle $0 < \alpha < 1$ beliebig. Dann ist für $w = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 \in M$

$$\|f - w\| = \|\alpha(f - v_1) + (1 - \alpha)(f - v_2)\| \stackrel{3.9}{<} E_M(f),$$

weil $\|f - v_1\| = \|f - v_2\| = E_M(f)$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $E_M(f)$. \square

Nach diesen Überlegungen wollen wir noch die Chebyshev-Mengen analysieren.

3.16 Satz. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $M \subseteq V$ eine endlich-dimensionale Chebyshev-Menge. Dann ist die metrische Projektion $\Pi_M : V \rightarrow M$, $f \mapsto \Pi_M(f)$ stetig. (beachte: Π_M ist im Allgemeinen nicht linear)*

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V mit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in V$. Weiter seien $v_n^* := \Pi_M(f_n)$ und $v^* = \Pi_M(f)$ die Proxima. Zu zeigen ist $v^* = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^*$. Dazu verwenden wir den folgenden Konvergenzsatz: Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge im normierten Raum V und $a \in V$. Falls **jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen $a \in V$ konvergierende Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt**, dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Schritt 1. Jede Teilfolge von (v_n^*) besitzt eine konvergente Teilfolge:

Dies folgt aus der Beschränktheit und $\dim(M) < \infty$: $\|v_n^*\| \leq 2 \|f_n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und (f_n) ist beschränkt, weil konvergent.

Schritt 2. Jede konvergente Teilfolge $(v_{n_k}^*)$ hat den Grenzwert v^* :

Sei dazu $w = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k}^* \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E_M(f) &\leq \|f - w\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - v_{n_k}^*\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\underbrace{\|f - f_{n_k}\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f_{n_k} - v_{n_k}^*\|}_{= E_M(f_{n_k})}) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \underbrace{(E_M(f_{n_k}) - E_M(f))}_{\substack{3.9 \\ \leq \|f_{n_k} - f\| \rightarrow 0}} + E_M(f) \\ &= E_M(f). \end{aligned}$$

Es folgt $E_M(f) = \|f - w\|$, also $w = \Pi_M(f) = v^*$ aufgrund der Eindeutigkeit des Proximums an f . \square

4 Approximation im Hilbertraum

4.1 Best-Approximation und Orthogonal-Projektion

4.1 Notation. Sei H ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) und $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt; das heißt es gelten die folgenden drei Eigenschaften:

1. $\langle f, f \rangle \geq 0$ und $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$
2. $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$
3. $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.

Auf H ist durch $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ eine Norm definiert.

Es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in H besitzt. Dann heißt H ein **Hilbertraum**.

Der folgende Satz macht das Arbeiten in Hilberträumen oft sehr handlich.

4.2 Satz. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis $\{e_k : k \in I\}$ mit einer Indexmenge I ; im Einzelnen gilt*

1. $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}$ für $j, k \in I$
2. Für jedes $f \in H$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ sowie Koeffizienten $c_j \in \mathbb{K}$ für $j \in J$ mit

$$\left\| f - \sum_{j \in J} c_j e_j \right\| \leq \varepsilon.$$

Falls I endlich oder abzählbar ist, so nennt man H **separabel**.

Der Beweis beruht auf dem Auswahlaxiom und soll hier nicht vertieft werden. Wir beschäftigen uns nur mit separablen Hilberträumen, die auch in den Anwendungen auftreten.

4.3 Beispiel. • \mathbb{R}^n mit $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ oder \mathbb{C}^n mit $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ mit ONB $\{e_k; k = 1, \dots, n\}$ der kanonischen Einheitsvektoren; oder den Spalten $\{v_1, \dots, v_n\}$ einer Orthogonalmatrix bzw. unitären Matrix

- $\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} : a_k \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$ mit $\langle (a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k$; mit ONB $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ der Folgen $e_k = (\delta_{j,k})_{j \in \mathbb{N}}$ (unendliche Einheitsvektoren)

- $\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} : a_k \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$; mit ONB $\{e_k; k \in \mathbb{Z}\}$ der Folgen $e_k = (\delta_{j,k})_{j \in \mathbb{Z}}$
- $L^2(0, 1) := \left\{ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar und } \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$ mit $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx < \infty$; eine ONB ist $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$.
- $L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ messbar und } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$ mit $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx < \infty$; mit der Indexmenge $I = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ schreiben wir die ONB $\{e_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_{j,k}(x) = \chi_{(j,j+1)}(x) e^{2\pi i k x}$. Weitere Orthonormalbasen sind sog. **Wavelet-Basen**.

In den letzten beiden Beispielen müssen eigentlich Äquivalenzklassen von Funktionen betrachtet werden mit $f = g$ fast überall.

4.4 Bemerkung. Alle endlich-dimensionalen Hilberträume H mit $\dim(H) = m$ sind isometrisch isomorph.

Separable Hilberträume mit $\dim(H) = \infty$ sind isometrisch isomorph. Die Isomorphie wird durch die bijektive Abbildung der Orthonormalbasen $\{e_k : k \in I_1\} \longleftrightarrow \{\widehat{e}_k : k \in I_2\}$ definiert.

4.5 Satz. Sei H ein separabler Hilbertraum mit $\dim(H) = \infty$. Durch $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ sei eine Orthonormalbasis von H gegeben. Dann gilt

1. **Bessel'sche Ungleichung:** Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=1}^n |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{für alle } f \in H.$$

2. **Parseval-Identität:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

3. Die Bestapproximation von $f \in H$ durch $M = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ ist gegeben durch

$$v^* = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k \text{ und es gilt}$$

$$E_M(f) = \inf \|f - v\| = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Also gilt

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

mit Konvergenz der Reihe in der Hilbertraum-Norm. Dies ist die **Fourier-Reihe** von f .

Zum Beweis dient der folgende Satz:

4.6 Satz. Sei H ein Hilbertraum und $M \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum.

- a) Dann existiert zu jedem $f \in H$ genau ein Proximum $v^* \in M$ (d.h. M ist Chebyscheff-Menge)
- b) Die metrische Projektion

$$\Pi_M : H \longrightarrow M, \quad \Pi_M(f) = v^*$$

hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) Π_M ist linear und stetig mit Operatornorm $\|\Pi_M\| = 1$
- (ii) $\Pi_M^2 = \Pi_M$, das heißt Π_M ist idempotent
- (iii) Π_M ist selbstadjungiert, das heißt es gilt

$$\langle \Pi_M f, g \rangle = \langle f, \Pi_M g \rangle = \langle \Pi_M f, \Pi_M g \rangle$$

für alle $f, g \in H$.

- (iv) Sei $M^\perp := \{g \in H : \langle f, g \rangle = 0 \text{ für alle } f \in M\}$ das **orthogonale Komplement von M** . Dann gilt

$$\Pi_M \Big|_M = \text{Id}, \quad \Pi_M \Big|_{M^\perp} = 0,$$

das heißt $M^\perp = \text{kern } \Pi_M$. Insbesondere kann $f \in H$ **orthogonal zerlegt** werden:

$$f = \underbrace{\Pi_M f}_{\in M} + \underbrace{(\text{Id} - \Pi_M)(f)}_{\in M^\perp}$$

Die Abbildung Π_M heißt **orthogonale Projektion** auf M .

Beweis. a) Das Skalarprodukt definiert eine strikt konvexe Norm: Für $\|f\| = \|g\| = 1$ und $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha f + (1 - \alpha) g\|^2 &= \langle \alpha f + (1 - \alpha) g, \alpha f + (1 - \alpha) g \rangle \\ &= \alpha^2 \|f\|^2 + (1 - \alpha)^2 \|g\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle \alpha f, (1 - \alpha) g \rangle) \\ &\leq \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + 2 \alpha (1 - \alpha) \underbrace{\|f\| \|g\|}_1 = (\alpha + (1 - \alpha))^2 = 1. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $f = \beta g$ für ein $\beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta| = 1$ gilt. Also gilt die strikte Ungleichung „ $<$ “ für $f \neq g$. Dies ist die strikte Konvexität. Also ist M Eindeutigkeitsmenge.

Um zu zeigen, dass M Existenzmenge ist, wählen wir zu beliebigem $f \in H$ eine Minimalfolge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_n \in M$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = E_M(f)$.

Wir zeigen nun, dass (v_n) eine Cauchy-Folge ist. Da M als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums selbst vollständig ist, besitzt (v_n) dann einen Grenzwert $v^* := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in M$, der das Proximum an f ist.

Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} (E_M(f))^2 &\leq \left\| f - \frac{1}{2}(v_n + v_m) \right\|^2 \leq \left\| f - \frac{1}{2}(v_n + v_m) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(v_n - v_m) \right\|^2 \\ &= \|f\|^2 + \frac{1}{4}\|v_n\|^2 + \frac{1}{4}\|v_m\|^2 - \operatorname{Re}(\langle f, v_n + v_m \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\langle v_n, v_m \rangle) + \frac{1}{4}\|v_n\|^2 + \frac{1}{4}\|v_m\|^2 - \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\langle v_n, v_m \rangle) \\ &= \frac{1}{2}\|f - v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|f - v_m\|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} (E_M(f))^2. \end{aligned}$$

Also gilt $\|v_n - v_m\|^2 \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Damit ist (v_n) eine Cauchy-Folge.

- b) (iv) Für $f \in H$ sei v^* das Proximum. Um zu zeigen, dass $(f - v^*) \in M^\perp$ gilt, definieren wir zu beliebig gewähltem $v \in M \setminus \{0\}$ die reelle Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\alpha) := \|f - v^* - \alpha v\|^2 = \|f - v^*\|^2 - 2\alpha \operatorname{Re}(\langle f - v^*, v \rangle) + \alpha^2 \|v\|^2.$$

Φ ist ein quadratisches Polynom mit positivem Höchstkoeffizienten $\|v\|^2$ und besitzt bei $\alpha = 0$ sein Minimum, weil v^* das eindeutige Proximum an f ist. Also gilt

$$\Phi'(0) = -2 \operatorname{Re}(\langle f - v^*, v \rangle) = 0.$$

Analog betrachtet man die Abbildung $\tilde{\Phi}(\alpha) := \|f - v^* - i\alpha v\|^2$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, und erhält $\tilde{\Phi}'(0) = -2 \operatorname{Im}(\langle f - v^*, v \rangle) = 0$. Insgesamt ist also

$$\langle f - v^*, v \rangle = 0.$$

Damit ist $f = v^* + (f - v^*)$ die orthogonale Zerlegung von f .

- (i) Additivität: Seien $f, g \in H$, $f = v^* + (f - v^*)$ und $g = w^* + (g - w^*)$ die orthogonalen Zerlegungen mit Proxima v^* bzw. w^* . Dann ist

$$f + g = \underbrace{v^* + w^*}_{\in M} + \underbrace{((f - v^*) + (g - w^*))}_{\in M^\perp}$$

die (eindeutige) orthogonale Zerlegung von $f + g$, also ist $\Pi_M(f + g) = v^* + w^*$.

Multiplikativität: folgt analog.

Stetigkeit: Die Operatornorm des linearen Operators Π_M ist 1. (Denn für $v \in M$ ist $\Pi_M v = v$, also $\|\Pi_M\| \geq 1$; für $f = v^* + (f - v^*)$ ist $\|f\|^2 = \|v^*\|^2 + \|f - v^*\|^2$, also $\|\Pi_M f\| = \|v^*\| \leq \|f\|$ und damit $\|\Pi_M\| \leq 1$.) Also ist Π_M beschränkt und linear, und deshalb stetig. (Einfacher Nachweis: $f_n \rightarrow f \implies \Pi_M f_n \rightarrow \Pi_M f$)

(ii) klar

(iii) Folgt mit (iv):

$$\langle \Pi_M f, g \rangle = \langle \Pi_M f, \Pi_M g + (g - \Pi_M g) \rangle = \dots$$

□

4.2 Der Hilbertraum $L^2(0, 1)$

Wir betrachten nun den Raum

$$L^2(0, 1) = \left\{ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

und der Orthogonalbasis $e_k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$, mit $k \in \mathbb{Z}$.

Im Folgenden setzen wir

$$\mathcal{T}_n := \text{span} \{e_k : -n \leq k \leq n\}$$

für den Vektorraum der **trigonometrischen Polynome** vom Grad $\leq n$. Es ist $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$.

4.7 Bemerkungen. Die Vollständigkeit der Orthonormalbasis $\{e_k(x) = e^{2\pi i k x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ stellt man fest, indem man eine der äquivalenten Bedingungen prüft:

1. $M := \text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ liegt dicht in $L^2(0, 1)$
2. Es ist $M^\perp = \{0\}$, das heißt aus $\langle f, e_k \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ folgt $f \equiv 0$ fast überall.
3. Es gilt die Parseval-Identität $\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_k \rangle|^2$.

Die Äquivalenz der Aussagen ist leicht einzusehen, jedoch erfordert der Beweis einer der Aussagen viel Aufwand. Wir werden dies im Laufe dieses Kapitels erledigen.

Als direkte Folgerung aus dem Approximationssatz im Hilbertraum ergibt sich der Satz zur Fourier-Approximation.

4.8 Folgerung. Die metrische Projektion Π_M mit $M = \mathcal{T}_n$ ist gegeben durch die **Fourierpartialsomme**

$$\Pi_M f = S_n f = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$$

mit den **Fourierkoeffizienten**

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

Wir stellen die folgende Überlegung zur Fourier-Partialsumme an. Es gilt

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=-n}^n \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i k y} dy e^{2\pi i k x} \\ &= \int_0^1 f(y) \underbrace{\left(\sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k (x-y)} \right)}_{=: D_n(x-y)} dy \end{aligned}$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k x} = e^{-2\pi i n x} \sum_{k=0}^{2n} (e^{2\pi i x})^k \\ &= \begin{cases} \frac{e^{-2\pi i n x} (e^{2\pi i (2n+1)x} - 1)}{e^{2\pi i x} - 1} = \frac{\sin(\pi(2n+1)x)}{\sin(\pi x)}, & x \in (0, 1), \\ 2n+1, & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Trotz der rationalen Darstellung beachte man $D_n \in \mathcal{T}_n$ aufgrund der Definition von D_n .

4.9 Definition (Faltung). a) Für $f, g \in L^2(0, 1)$ definiere die (periodische) Faltung von f und g durch

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(y) g(x-y) dy.$$

Hierbei wird die Funktion g als periodische Funktion mit Periodenlänge 1 auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt.

b) Es sei $K : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|K\|_1 = \int_0^1 |K(x)| dx < \infty$. Dann heißt

$$T_K : L^2(0, 1) \longrightarrow L^2(0, 1), \quad T_K f(x) = \int_0^1 f(y) K(x-y) dy = (f * K)(x)$$

Faltungsoperator, und K der zugehörige **Faltungskern**.

4.10 Bemerkung. a) Die Faltung $f * g$ ist für $f, g \in L_2(0, 1)$ punktweise definiert:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_0^1 |f(y)| |g(x-y)| dy \\ &\stackrel{\text{CS.}}{\leq} \left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_0^1 |g(x-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}}_{= \left(\int_0^1 |g(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \|f\|_2 \|g\|_2 \end{aligned}$$

Also ist $f * g$ beschränkt. Genauere Analyse zeigt sogar, dass $f * g$ stetig ist mit $f * g(0) = f * g(1)$.

b) Die Faltung $f * K$ ergibt für $f \in L_2(0, 1)$, $K \in L_1(0, 1)$ wieder eine Funktion in $L_2(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f * K(x)|^2 dx &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(y)| |K(x-y)| dy \right)^2 dx \\ &\stackrel{\text{CS.}}{\leq} \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(y)|^2 |K(x-y)| dy \right) \underbrace{\left(\int_0^1 |K(x-y)| dy \right)}_{=\|K\|_1} dx \\ &= \|K\|_1 \int_0^1 \int_0^1 |f(y)|^2 |K(x-y)| dx dy \\ &= \|K\|_1^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Also ist T_K ein linearer beschränkter Operator auf $L_2(0, 1)$, seine Operatornorm ist kleiner oder gleich $\|K\|_1$.

Spezielle Faltungsoperatoren liefern als Bildbereich trigonometrische Polynome vom Grad n , wie das folgende Lemma zeigt.

4.11 Satz. Für $K \in \mathcal{T}_n$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$) gilt $T_K f \in \mathcal{T}_n$ für alle $f \in L^2(0, 1)$.

Sind $a_k = c_k(K)$ die Fourierkoeffizienten von K , $-n \leq k \leq n$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von $T_K f$

$$c_k(T_K f) = \begin{cases} a_k c_k(f), & |k| \leq n, \\ 0, & |k| > n. \end{cases}$$

Beweis. Für $K(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{2\pi i k x}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} T_K f(x) &= (f * K)(x) = \sum_{k=-n}^n a_k \int_0^1 f(y) e^{2\pi i k(x-y)} dy \\ &= \sum_{k=-n}^n a_k e^{2\pi i k x} \underbrace{\int_0^1 f(y) e^{-2\pi i k y} dy}_{=c_k(f)} \\ &= \sum_{k=-n}^n a_k c_k(f) e^{2\pi i k x}. \end{aligned}$$

□

Faltungsoperatoren heissen wegen der obigen Eigenschaft auch “Fourier-Multiplier” oder “Filter”. Ein Faltungskern $K \in \mathcal{T}_n$ annulliert alle Fourierkoeffizienten $c_k(f)$ mit $|k| > n$, annulliert also die hohen Frequenzen von f .

4.12 Beispiel (Wichtige Faltungskerne). a) **Dirichlet-Kern:**

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k x} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2n+1)x)}{\sin(\pi x)}, & x \in (0, 1), \\ 2n+1, & x = 0. \end{cases} \in \mathcal{T}_n.$$

b) **Fejér-Kern:**

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2, & x \in (0, 1) \\ n, & x = 0. \end{cases} \in \mathcal{T}_{n-1}.$$

c) **Jackson-Kerne:** Für $r \geq 2$ heißt die Funktion

$$J_n^{(r)}(x) := w_{n,r} \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} \in \mathcal{T}_{r(n-1)}$$

mit

$$w_{n,r}^{-1} := \int_0^1 \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx$$

Jackson-Kern der Ordnung r . In $x = 0$ erfolgt die stetige Fortsetzung mit $J_n^{(r)}(0) = n^{2r} w_{n,r}$.

4.13 Eigenschaften. a) **Symmetrie:** Die Kerne D_n , F_n und $J_n^{(r)}$ sind gerade: $K_n(-x) = K_n(x)$

b) **Normierung:** Es gilt

$$\int_0^1 D_n(x) dx = \int_0^1 F_n(x) dx = \int_0^1 J_n^{(r)}(x) dx = 1.$$

Deshalb folgt mit Satz 4.11

$$c_0(S_n f) = c_0(f * D_n) = c_0(f * F_n) = c_0(f * J_n^{(r)}) = c_0(f).$$

Die konstanten Funktionen werden also reproduziert.

c) **Beschränkte Operatornorm auf $L^2(0, 1)$:** Die zugehörigen Faltungsoperatoren $T_{K_n} : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$, mit Faltungskern $K_n = D_n, F_n$ oder $J_n^{(r)}$ erfüllen

$$\|T_{D_n}\| = \|S_n\| = 1, \quad \|T_{F_n}\| = 1, \quad \|T_{J_n^{(r)}}\| = 1.$$

Dies sieht man wie folgt: S_n ist die Orthogonalprojektion auf \mathcal{T}_n , hat also die Operatornorm 1.

Für F_n und $J_n^{(r)}$ ergibt die Normierung jeweils $T_{K_n}(e_0) = e_0$ (Reproduktion der Konstanten); also ist die Operatornorm mindestens 1. Außerdem liefert die Positivität $F_n(x) \geq 0$ und $J_n^{(r)}(x) \geq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ jeweils die L_1 -Norm

$$\|K_n\|_1 = \int_0^1 K_n(x) dx = 1,$$

mit Bemerkung 4.10(b) also auch die obere Abschätzung für die Operatornorm.

4.14 Bemerkung. Die L_1 -Norm des Dirichlet-Kerns D_n ist von der Größenordnung $\ln n$, sie ist also nicht beschränkt für n gegen unendlich.

Beweis: Der Mittelwertsatz liefert die Standard-Abschätzung

$$2x \leq \sin \pi x \leq \pi x, \quad x \in [0, 1/2]. \quad (4.1)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 |D_n(x)| dx &= 2 \int_0^{1/2} |D_n(x)| dx \\ &\begin{cases} \geq \frac{2}{\pi} \\ \leq 1 \end{cases} \cdot \int_0^{1/2} \frac{|\sin \pi(2n+1)x|}{x} dx. \end{aligned}$$

Das letzte Integral wird mit der Substitution $y = (2n+1)x$ zu

$$\int_0^{1/2} \frac{|\sin \pi(2n+1)x|}{x} dx = \int_0^{(2n+1)/2} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy.$$

Aufteilen in die Bereiche zwischen den Nullstellen $k \in \mathbb{Z}$ des Zählers ergibt

$$\int_0^{(2n+1)/2} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy + \int_n^{(2n+1)/2} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy. \quad (4.2)$$

- Abschätzung von $\|D_n\|_1$ nach unten: Für $0 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy \geq \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} |\sin \pi y| dy = \frac{2}{(k+1)\pi},$$

also insgesamt durch Weglassen des letzten Summanden

$$\int_0^1 |D_n(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Die Partialsumme der harmonischen Reihe schätzen wir mit dem Integral-Vergleichskriterium nach unten ab:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \geq \int_0^n \frac{1}{y+1} dy = \ln(n+1)$$

Wir erhalten das Ergebnis

$$\int_0^1 |D_n(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \ln(n+1).$$

Damit ist gezeigt, dass die L_1 -Norm der Kerne D_n nicht gleichmäßig beschränkt ist, d.h. $\sup_n \|D_n\|_1 = \infty$.

- Abschätzung von $\|D_n\|_1$ nach oben: Für $1 \leq k \leq n-1$ in (4.2) gilt

$$\int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} |\sin \pi y| dy = \frac{2}{k\pi}.$$

Den ersten Summanden in (4.2) schätzen wir mit (4.1) nach oben ab durch

$$\int_0^1 \frac{|\sin \pi y|}{y} dy \leq \pi,$$

den letzten Summanden durch

$$\int_n^{(2n+1)/2} \frac{|\sin \pi y|}{y} dy \leq \frac{1}{n} \int_n^{(2n+1)/2} |\sin \pi y| dy = \frac{1}{n\pi},$$

also insgesamt

$$\int_0^1 |D_n(x)| dx \leq \pi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n\pi} = \pi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n\pi}.$$

Für die Partialsumme der harmonischen Reihe gilt analog wie oben

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{y} dy = 1 + \ln n.$$

Wir erhalten das Ergebnis

$$\int_0^1 |D_n(x)| dx \leq \pi + \frac{2}{\pi}(1 + \ln n).$$

- Durch noch genauere Rechnung zeigt man, dass gilt

$$\int_0^1 |D_n(x)| dx = \frac{4}{\pi^2} \ln(n) + \mathbf{O}(1).$$

Mit dem Additionstheorem ist

$$|D_n(x)| = \frac{1}{|\sin(\pi x)|} |\sin(2n\pi x) \cos(\pi x) + \cos(2n\pi x) \sin(\pi x)| = |\sin(2n\pi x) \cot(\pi x) + \cos(2n\pi x)|.$$

Ersetzen von $\cot(\pi x)$ durch die Näherung $\frac{1}{\pi x}$ ergibt

$$|D_n(x)| = \left| \frac{1}{\pi x} \sin(2n\pi x) \right| + g_n(x)$$

mit der stetigen Funktion $g_n : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$, die beschränkt ist durch

$$|g_n(x)| \leq |\sin(2n\pi x)| \left| \cot(\pi x) - \frac{1}{\pi x} \right| + |\cos(2n\pi x)| \leq \frac{2}{\pi} + 1.$$

(Der Term im ersten Betrag ist monoton fallend in $0 \leq x \leq 1/2$ mit Wert 0 bei $x = 0$ und $2/\pi$ bei $x = 1/2$.) Also ist

$$\int_{-1/2}^{1/2} |D_n(x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{|\sin(2n\pi x)|}{x} dx + \mathbf{O}(1).$$

Beim Integral liefert die Substitution $y = 2nx$

$$\int_0^{1/2} \frac{|\sin(2n\pi x)|}{x} dx = \int_0^n \frac{|\sin(\pi y)|}{y} dy,$$

und für dieses Integral haben wir bereits gezeigt

$$\int_0^n \frac{|\sin(\pi y)|}{y} dy = \frac{2}{\pi} \ln(n) + \mathbf{O}(1).$$

Die Faltungskerne mit wachsendem Grad n lassen sich zur Approximation von Funktionen $f \in L_2(0, 1)$ einsetzen. Dahinter steckt ein allgemeines Prinzip, das jetzt angegeben werden soll.

4.15 Definition (approximative Einheit). *Eine Folge von Faltungskernen $K_n \in L_1(0, 1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt **approximative Einheit**, wenn gilt*

1. *asymptotische Normierung:* $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 K_n(x) dx = 1.$

2. **gleichmäßige Beschränktheit:** $\int_0^1 |K_n(x)| dx \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3. **Lokalisierung:** Für jedes $0 < \delta < \frac{1}{2}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} |K_n(x)| dx = 0.$$

4.16 Satz (Approximationssatz). *Ist die Folge von Faltungskernen $K_n \in L_1(0, 1)$ eine approximative Einheit, so gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * K_n\|_2 = 0$$

für alle $f \in L_2(0, 1)$.

Der Beweis wird nicht hier gegeben, er wird im Anschluss an die Approximation mit Faltungskernen auf $C[0, 1]$ bzgl. der Maximumnorm gezeigt, indem f zuerst durch eine stetige Funktion g approximiert wird und dann $g - g * K_n$ betrachtet wird.

Die Lokalisierungseigenschaft in Definition 4.15 (3.) ist etwas unhandlich. Sie kann ersetzt werden durch verschiedene Bedingungen, z.B. ist die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) = 0 \quad \text{für alle } \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}$$

hinreichend für 4.15 (3.). Eine andere hinreichende Bedingung wird in Form der **absoluten Momente** eines Faltungskerns angegeben.

4.17 Definition (absolute Momente). *Für einen Faltungskern $K \in L_1(0, 1)$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$M_k(K) := \int_{-1/2}^{1/2} |x|^k |K(x)| dx$$

das absolute Moment k -ter Ordnung.

4.18 Lemma. *Es sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Faltungskernen in $L_1(0, 1)$. Falls für ein $k \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_k(K_n) = 0$$

gilt, so erfüllt die Folge der Faltungskerne die Lokalisierungseigenschaft in Definition 4.15 (3.). Genauer: für jedes $0 < \delta < 1/2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{\delta \leq |y| \leq 1/2} |K_n(y)| dy \leq \frac{M_k(K_n)}{\delta^k}.$$

Das Lemma enthält neben der qualitativen Aussage (=Konvergenz gegen Null für $n \rightarrow \infty$) auch das quantitative Ergebnis für festes $n \in \mathbb{N}$. Wir haben die Anwendung der Momente (im diskreten Fall) bereits bei den Sätzen von Popoviciu und Voronovskaja kennengelernt.

Zum Abschluss geben wir noch scharfe Abschätzungen für die Momente der Fejér- und Jackson-Kerne in Beispiel 4.12 an. Hierbei bedeutet $a_n \sim b_n$, dass die Folgenglieder a_n und b_n für $n \rightarrow \infty$ das gleiche asymptotische Verhalten haben, also Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren mit

$$c_1 \leq \frac{b_n}{a_n} \leq c_2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

4.19 Lemma. a) Für die Momente des Fejér-Kerns gilt

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^k |F_n(x)| dx \sim \begin{cases} \frac{\ln n}{n}, & k = 1, \\ \frac{1}{n}, & k \geq 2. \end{cases}$$

b) Für die Momente des Jackson-Kerns $J_n^{(r)}$ mit $r \geq 2$ gilt

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^k |J_n^{(r)}(x)| dx \sim \begin{cases} \frac{1}{n^k}, & k \leq 2r - 2, \\ \frac{\ln n}{n^{2r-1}}, & k = 2r - 1, \\ \frac{1}{n^{2r-1}}, & k \geq 2r. \end{cases}$$

Beweis. Wir setzen $r = 1$ in Teil a) und $r \geq 2$ in Teil b) und betrachten die Kehrwerte der Normierungskonstanten

$$\omega_{n,r}^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx.$$

Aufgrund der Definition des Fejér-Kerns wissen wir bereits $\omega_{n,1} = \frac{1}{n}$, und allgemein erhalten wir mit der Standard-Abschätzung (4.1) sowie der Substitution $y = nx$

$$\omega_{n,r}^{-1} \sim \int_0^{1/2} \left(\frac{\sin(n\pi x)}{x} \right)^{2r} dx = n^{2r-1} \int_0^{n/2} \left(\frac{\sin(\pi y)}{y} \right)^{2r} dy \sim n^{2r-1}.$$

Im letzten Schritt wurde die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi y)}{y} \right)^{2r} dy < \infty, \quad r \geq 1,$$

verwendet. Ganz analog ergibt sich für $1 \leq k \leq 2r - 2$ auch

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^k \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx \sim n^{2r-k-1},$$

und durch Multiplikation mit $\omega_{n,r}$ folgt die Behauptung für diese k . Weiterhin ist für $k = 2r - 1$

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^k \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx \sim \int_0^{n/2} \left(\frac{\sin(\pi y)}{y} \right)^{2r} dy \sim \ln n;$$

im letzten Schritt wurde dabei die Rechnung wie zum Dirichlet-Kern durchgeführt, vergleiche Bemerkung 4.14. Für $k \geq 2r$ wird schließlich

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|^k \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^{2r} dx \sim \int_0^{1/2} x^{k-2r} (\sin(n\pi x))^{2r} dx \sim 1.$$

□

5 Approximation in $C_*[0, 1]$

Im Kapitel 2 wurden quantitative Aussagen zum Bernstein-Operator

$$B_n : C[0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_n, \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x),$$

gemacht. Der Satz von Popoviciu besagt beispielsweise, dass

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{5}{4} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

gilt, wobei $\omega(f, \cdot)$ der Stetigkeitsmodul von f ist. Aussagen dieses Typs nennt man “direkte Sätze” oder “Jackson-Sätze”, weil sie eine Schranke des Approximationsfehlers in Abhängigkeit des verwendeten Polynomgrads liefern. In diesem Kapitel werden Sätze dieses Typs für die Bestapproximation periodischer Funktionen mit trigonometrischen Polynomen behandelt, also für $E_M(f)$ mit $M = \mathcal{T}_n$.

Andererseits lassen sich aus der Asymptotik des Approximationsgrads $E_M(f)$ für $M = \mathcal{T}_n$ einer stetigen und periodischen Funktion auch Schlussfolgerungen auf Glattheitseigenschaften von f ziehen. Aussagen dieses Typs nennt man “Umkehrsätze” oder Sätze vom “Bernstein-Typ”.

In diesem Kapitel verwenden wir die folgenden Notationen. Es sind

$$\begin{aligned} C_*[0, 1] &= \{f \in C(\mathbb{R}) : f(x+1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}, \\ C_*^k[0, 1] &= \{f \in C^k(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : f(x+1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

die Vektorräume der stetigen bzw. k -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Periode 1. Als Wertebereich wählen wir entweder \mathbb{R} oder \mathbb{C} , als Norm auf $C_*[0, 1]$ die Maximumnorm.

Man beachte: die Einschränkung auf das Intervall $[0, 1)$ bestimmt f bereits für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich $\mathbb{T} \simeq [0, 1)$ wird identifiziert mit der Einheitskreislinie: die ϵ -Umgebung von 0 ist dann $U_\epsilon(0) = [0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1)$. Insbesondere ist der Definitionsbereich \mathbb{T} kompakt.

Zunächst wollen wir die Faltungsoperatoren aus Kapitel 4 als Operatoren auf $C_*[0, 1]$ betrachten.

5.1 Satz. *Es sei $K \in C_*[0, 1]$ eine reell-wertige Funktion. Der Faltungsoperator*

$$T_K : C_*[0, 1] \longrightarrow C_*[0, 1], \quad T_K f = f * K$$

hat die Operatornorm

$$\|T_K\|_{C_* \rightarrow C_*} = \|K\|_1 = \int_0^1 |K(x)| dx.$$

Beweis. 1. Ist $\|f\|_\infty = 1$, so folgt für $x \in [0, 1]$

$$|f * K(x)| = \left| \int_0^1 f(y) K(x-y) dy \right| \leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{=1} \underbrace{\int_0^1 |K(x-y)| dy}_{=\int_0^1 |K(y)| dy}.$$

Also ist $\|T_K\| \leq 1$.

2. Zu $\varepsilon > 0$ konstruieren wir $f \in C_*[0, 1]$ mit $\|T_K f\|_\infty \geq 1 - 2\varepsilon$. (Vgl. hierzu etwa das Vorgehen in der Numerik 1 zur Zeilensummennorm von Matrizen.)

Es sei

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{x \in [0, 1] : K(-x) \geq \varepsilon\}, \\ M_2 &:= \{x \in [0, 1] : K(-x) \leq -\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Diese Mengen sind offensichtlich disjunkt und wegen der Stetigkeit von K abgeschlossen und kompakt. Nach dem **Satz von Urysohn** oder **Satz von Tietze** aus der Topologie existiert ein $f \in C_*[0, 1]$ mit

$$f(x) = 1 \text{ für } x \in M_1, \quad f(x) = -1 \text{ für } x \in M_2,$$

sowie

$$|f(x)| \leq 1 \text{ für } x \in [0, 1] \setminus (M_1 \cup M_2) =: I_\varepsilon.$$

Hiermit ist

$$\begin{aligned} |f * K(0)| &= \left| \int_0^1 f(y) K(-y) dy \right| \\ &= \int_{M_1 \cup M_2} |K(-y)| dy + \int_{I_\varepsilon} f(y) K(-y) dy \\ &\geq \int_{M_1 \cup M_2} |K(-y)| dy - \int_{I_\varepsilon} |f(y) K(-y)| dy \\ &\geq \int_0^1 |K(-y)| dy - 2 \int_{I_\varepsilon} \underbrace{|K(-y)|}_{\leq \varepsilon} dy \\ &\geq \int_0^1 |K(-y)| dy - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Bildet die Folge von Faltungskernen $K_n \in C_*[0, 1]$ eine approximative Einheit im Sinne der Definition 4.15, so besitzen die Faltungsoperatoren die folgende Approximationseigenschaft.

5.2 Satz (Allgemeiner Approximationssatz für Faltungsoperatoren). *Die Folge $K_n \in C_*[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, sei eine approximative Einheit. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * K_n\|_\infty = 0$$

für alle $f \in C_*[0, 1]$.

Genauer: Es sei

$$c_n := \left| 1 - \int_0^1 K_n(y) dy \right|, \quad \text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{ wegen 4.15 (1).}$$

Dann gilt für jedes $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C_*[0, 1]$

$$\|f - f * K_n\|_\infty \leq \|K_n\|_1 \omega(f, \delta) + \|f\|_\infty \left(c_n + 2 \int_{\delta \leq |y| \leq 1/2} |K_n(y)| dy \right). \quad (5.2)$$

Beweis. Schritt 1. Aus (5.2) folgt die erste Aussage:

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass $\omega(f, \delta) < \frac{\varepsilon}{M}$ mit M aus Definition 4.15 (2). Wegen 4.15 (1) und (3) existiert $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $c_n < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}$ und

$$\int_{|y| \geq \delta} |K_n(y)| dy < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$$

für alle $n \geq n_0$. Dann folgt aus (5.2) für alle $n \geq n_0$

$$\|f - f * K_n\|_\infty \leq \underbrace{\|K_n\|_1}_{\leq M} \frac{\varepsilon}{M} + 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} + \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty} \leq 3\varepsilon.$$

Schritt 2. Zeige die Abschätzung in (5.2).

Für $x \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - (f * K_n)(x)| &= \left| f(x) - \int_{-1/2}^{1/2} K_n(y) f(x-y) dy \right| \\ &\leq \left| f(x) \left(1 - \int_{-1/2}^{1/2} K_n(y) dy \right) \right| + \left| \int_{-1/2}^{1/2} K_n(y) (f(x) - f(x-y)) dy \right| \\ &\leq c_n \|f\|_\infty + \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x) - f(x-y)|}_{\leq \omega(f, \delta)} |K_n(y)| dy \\ &\quad + \int_{\delta \leq |y| \leq 1/2} \underbrace{|f(x) - f(x-y)|}_{\leq 2\|f\|_\infty} |K_n(y)| dy \\ &\leq c_n \|f\|_\infty + \omega(f, \delta) \|K_n\|_1 + 2\|f\|_\infty \int_{\delta \leq |y| \leq 1/2} |K_n(y)| dy. \end{aligned}$$

Dies ist (5.2). □

Für Kerne K_n mit den Eigenschaften

$$\|K_n\|_1 = 1, \quad c_n = 1 - \int_{-1/2}^{1/2} K_n(x) dx = 0,$$

also z.B. die Fejér-Kerne F_n und die Jackson-Kerne $J_n^{(r)}$, vereinfacht sich die Abschätzung (5.2) zu

$$\|f - f * K_n\|_\infty \leq \omega(f, \delta) + 2 \|f\|_\infty \int_{\delta \leq |y| \leq 1/2} |K_n(y)| dy. \quad (5.3)$$

Unter Verwendung der absoluten Momente lassen sich auch quantitative Aussagen zeigen. Dies führt auf die direkten Sätze oder Jackson-Sätze zur Approximation.

5.1 Jackson-Sätze

Wir erzielen nun quantitative Aussagen zur Approximationsgüte von Faltungsoperatoren und sogar von Proxima an $f \in C_*[0, 1]$. Die Beweistechnik verwendet die absoluten Momente z.B. der Jackson-Kerne $J_n^{(r)}$ in (??). Sie wurde ganz ähnlich im Satz von Popoviciu für die Bernstein-Operatoren angewendet. Zuvor noch eine Begriffs-Erweiterung.

5.3 Definition. *Es sei $K = \mathbb{T}$ oder $K \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall sowie $r \in \mathbb{N}$. Für $t > 0$ und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir*

$$\omega_r(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \|\Delta_h^r f\|_\infty = \sup_{0 < h \leq t} \sup_{x, x+rh \in K} |\Delta_h^r f(x)| \quad (5.4)$$

den r -ten Glattheitsmodul von f zur Schrittweite t . Dabei ist

$$\Delta_h^r f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f)(x) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} f(x + jh)$$

die r -te Vorwärts-Differenz von f an der Stelle x .

Bemerkung: Eine Kleinigkeit ist zur Definition von ω_r zu sagen: die Definition verlangt, dass

$$x, x + h, \dots, x + rh \in K$$

im Definitionsbereich von f liegen. Dies ist für periodisches f (also $K = \mathbb{T}$) keine Einschränkung, weil f auf ganz \mathbb{R} definiert ist; für $K = [a, b]$ und (nichtperiodisches) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist allerdings das Supremum nur über $x \in [a, b - rh] =: K(r, h)$ zu bilden.

Eigenschaften der Glattheitsmodule sind in der folgenden Aussage zusammengefasst. Der Fall $r = 1$ ist bereits in Kapitel 2 enthalten.

5.4 Lemma. *Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $K = \mathbb{T}$ oder $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt. Die Funktionen f, g seien Elemente von $C(K)$.*

(i) *Es ist $\omega_r(f, t) \geq 0$ für alle $t > 0$ und $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_r(f, t) = 0$.*

$\omega_r(f, t)$ ist monoton wachsend bzgl. t .

(ii) *$\omega_r(\alpha f, t) = |\alpha| \omega_r(f, t)$ und $\omega_r(f + g, t) \leq \omega_r(f, t) + \omega_r(g, t)$.*

(iii) *$\omega_r(f, nt) \leq n^r \omega_r(f, t)$ für $n \in \mathbb{N}$.*

$\omega_r(f, \lambda t) \leq \lceil \lambda \rceil^r \omega_r(f, t)$ für reelles $\lambda > 0$.

(iv) *$\omega_r(f, t) \leq 2 \omega_{r-1}(f, t) \leq 2^{r-1} \omega_1(f, t) \leq 2^r \|f\|_\infty$.*

(v) *$\omega_r(f, t) \leq t \omega_{r-1}(f', t)$ für $f \in C^1(K)$.*

(vi) *Aus $\omega_r(f, t) = \mathbf{o}(t^r)$ für $t \rightarrow 0$ folgt $f \in \mathcal{P}_{r-1}$.*

Beweis. Proof: Die Beweise von (i) und (ii) sind wie beim Stetigkeitsmodul in Kapitel 2.

(iii) Wir verwenden die Operatorenreibweise

$$\Delta_h = \tau_h - I, \quad \tau_h f = f(\cdot + h).$$

τ_h ist eine Translation von f und I ist die Identität auf $C(K)$. Damit ist Δ_{nh} die Teleskopsumme

$$\begin{aligned} \Delta_{nh} &= \tau_{nh} - I \\ &= \tau_{nh} - \tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-1)h} - \tau_{(n-2)h} + \cdots + \tau_h - I \\ &= \Delta_h \circ \tau_{(n-1)h} + \Delta_h \circ \tau_{(n-2)h} + \cdots + \Delta_h \circ I. \end{aligned}$$

Wir benötigen die r -te Potenz des Operators Δ_{nh} . Dazu berücksichtigen wir, dass Δ_h mit jedem Translationsoperator τ_y kommutiert, denn es ist

$$\Delta_h \circ \tau_y(f) = \Delta_h(f(\cdot + y)) = f(\cdot + y + h) - f(\cdot + y) = \tau_y(f(\cdot + h) - f) = \tau_y \circ \Delta_h(f).$$

Also können wir (wie bei üblichen Potenzgesetzen) ausklammern und erhalten

$$\Delta_{nh}^r = \Delta_h^r \circ (\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \cdots + I)^r = (\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \cdots + I)^r \circ \Delta_h^r.$$

Damit ist für jedes $f \in C(K)$

$$\|\Delta_{nh}^r f\|_\infty = \|(\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \cdots + I)^r (\Delta_h^r f)\|_\infty \leq \|(\tau_{(n-1)h} + \tau_{(n-2)h} + \cdots + I)^r\|_{\text{op}} \|\Delta_h^r f\|_\infty.$$

Mit der Operatornorm $\|\tau_y\|_{\text{op}} = 1$ und der Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\|\Delta_{nh}^r f\|_\infty \leq n^r \|\Delta_h^r f\|_\infty.$$

Insgesamt erhalten wir für den Glattheitsmodul

$$\omega_r(f, nt) = \sup_{0 < h \leq nt} \|\Delta_h^r f\|_\infty = \sup_{0 < h \leq t} \|\Delta_{nh}^r f\|_\infty \leq n^r \sup_{0 < h \leq t} \|\Delta_h^r f\|_\infty = n^r \omega_r(f, t).$$

(iv) Die Rekursion $\Delta_h^r = \Delta_h \circ \Delta_h^{r-1} = (\tau_h - I) \circ \Delta_h^{r-1}$ ergibt

$$\|\Delta_h^r f\|_\infty \leq \|\tau_h - I\|_{\text{op}} \|\Delta_h^{r-1} f\|_\infty \leq 2 \|\Delta_h^{r-1} f\|_\infty.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(v) Falls f differenzierbar ist, so ist auch die Funktion $g := \Delta_h^{r-1} f$ differenzierbar (klar mittels Ausschreiben von Δ_h^{r-1} als Summe), und es gilt $g' = \Delta_h^{r-1}(f')$. Die Rekursion in (iv) ergibt also

$$|\Delta_h^r f(x)| = |g(x+h) - g(x)| = \left| \int_0^h g'(x+y) dy \right| \leq h \|\Delta_h^{r-1}(f')\|_\infty.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(vi) Die Behauptung hat einen überraschend komplizierten Beweis, verglichen mit der Aussage zum einfachen Stetigkeitsmodul. Dies liegt daran, dass aus $\Delta^r f = 0$ nicht leicht auf die Differenzierbarkeit von f geschlossen werden kann!

Es sei $t_0 > 0$ beliebig. Die Voraussetzung $\omega_r(f, t) = \mathbf{o}(t^r)$ für $t \rightarrow 0$ liefert die Existenz einer Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\omega_r(f, \frac{t_0}{n}) \leq \varepsilon_n \left(\frac{t_0}{n}\right)^r \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit (iii) folgt daraus

$$\omega_r(f, t_0) \leq n^r \omega_r(f, \frac{t_0}{n}) \leq \varepsilon_n t_0^r \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die linke Seite hängt nicht von n ab, also gilt

$$\omega_r(f, t_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n t_0^r = 0.$$

Deshalb ist die Voraussetzung äquivalent zur Bedingung

$$\|\Delta_h^r f\|_\infty = 0 \tag{5.5}$$

für alle $h > 0$, für die die Menge $K_{r,h}$ nicht leer ist.

Die Behauptung (vi) ist also äquivalent zu:

Aus $\Delta_h^r f \equiv 0$ für alle $0 < h \leq t$, mit einem festen $t > 0$, folgt $f \in \mathcal{P}_{r-1}$.

(5.6)

Diese Äquivalenz wird per Induktion nach $r \in \mathbb{N}$ bewiesen.

1. Für $r = 1$ folgt aus $\Delta_h f \equiv 0$ für alle $0 < h \leq t$ sofort $f(y) - f(x) = 0$ für alle $|y - x| \leq t$. Weil K als Intervall (oder \mathbb{T}) zusammenhängend ist, ist f konstant, also ein Element von \mathcal{P}_0 .
2. Um den Induktionsschluss von r nach $r + 1$ zu führen, treffen wir einige Vorbereitungen. Es sei $f \in C(K)$ mit $\Delta_h^{r+1} f \equiv 0$ für alle $0 < h \leq t$. Der größte Teil des Beweises wird darauf verwendet zu zeigen, dass hieraus

$$\Delta_h^r f = ch^r \quad \text{für alle } 0 < h \leq t \tag{5.7}$$

mit einer Konstanten c folgt. Insbesondere muss gezeigt werden, dass $\Delta_h^r f(x)$ nicht mehr von x abhängt (Teil 2.b unten).

Wir definieren die Funktion

$$g(x, h) = \Delta_h^r f(x), \quad x \in K(r, h), \quad 0 < h \leq t,$$

wobei $K_{r,h}$ der maximale Zulässigkeitsbereich zur Definition von $\Delta_h^r f$ ist. g ist stetig (als Funktion beider Variablen x und h). Wir betrachten zunächst die Funktion $g(\cdot, h)$ für festes $h > 0$.

- 2.a Aus $\Delta_h g(\cdot, h) = \Delta_h^{r+1} f \equiv 0$ folgt, dass die Funktion $g(\cdot, h)$ *periodisch mit der Periodenlänge h* ist, denn für alle $x \in K(h, r + 1)$ ist

$$g(x+h, h) - g(x, h) = \Delta_h^{r+1} f(x) = 0.$$

2.b Wir wollen zeigen, dass $g(\cdot, h)$ sogar konstant ist. Dazu betrachten wir zusätzlich die Funktionen $g(\cdot, \frac{h}{n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Jede einzelne dieser Funktionen ist periodisch mit der Periodenlänge $\frac{h}{n}$. Wie in (??) erhalten wir

$$g(\cdot, h) = \Delta_h^r f = (\tau_{\frac{(n-1)h}{n}} + \tau_{\frac{(n-2)h}{n}} + \cdots + I)^r (\Delta_{\frac{h}{n}}^r f) = (\tau_{\frac{(n-1)h}{n}} + \tau_{\frac{(n-2)h}{n}} + \cdots + I)^r g(\cdot, \frac{h}{n}).$$

Die Periodenlänge $\frac{h}{n}$ der Funktion $g(\cdot, \frac{h}{n})$ wurde in 2.a begründet. Sie sichert $\tau_{\frac{kh}{n}} g(\cdot, \frac{h}{n}) = g(\cdot, \frac{h}{n})$, also folgt

$$g(\cdot, h) = n^r g(\cdot, \frac{h}{n}). \quad (5.8)$$

Deshalb ist auch $g(\cdot, h)$ periodisch mit Periodenlänge $\frac{h}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.c Nun kommt die Stetigkeit von $g(\cdot, h)$ ins Spiel. Es sei $x_0 \in K(h, r)$ fest und $y \in K(h, r)$ ein weiterer Punkt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei y_n derjenige Punkt der Menge $x_0 + \frac{h}{n}\mathbb{Z}$ mit dem kleinsten Abstand zu y (bei Nicht-Eindeutigkeit wähle ein solches y_n aus). Offensichtlich ist $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Andererseits ergibt die Periodizität $g(y_n, h) = g(x_0, h)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Stetigkeit liefert also $g(y, h) = g(x_0, h)$, und deshalb ist $g(\cdot, h)$ konstant.

3. Für den Induktionsschluss betrachten wir nun die Variable h und zeigen

$$g(\cdot, h) = \left(\frac{h}{t}\right)^r g(\cdot, t) \quad \text{für alle } 0 < h \leq t. \quad (5.9)$$

Für $h = \frac{t}{n}$ ist dies bereits in (5.8) enthalten (ersetze dort h durch t). Daraus folgt dann (5.9) auch für $h = \frac{mt}{n}$ mit $1 \leq m \leq n$, wieder mit Hilfe von (5.8) (ersetze dort n durch m sowie h durch $\frac{t}{n}$). Dies zeigt (5.9) für alle rationalen Vielfachen qt mit $0 < q \leq 1$. Die Stetigkeit von g (bzgl. h) liefert schließlich (5.9) für alle $0 < h \leq t$.

4. Weil $g(\cdot, t)$ konstant ist (bzgl. x), folgt aus (5.9)

$$\Delta_h^r f = g(\cdot, h) = ch^r \quad \text{für alle } 0 < h \leq t, \quad (5.10)$$

mit der Konstanten $c = t^{-r} g(\cdot, t)$ (beachte: $t > 0$ war fest).

5. Nun kommt endlich der Induktionsschluss. Für die spezielle Funktion $e_r(x) = \frac{cx^r}{r!}$ gilt ebenfalls $\Delta_h^r e_r = ch^r$ (z.B. nachrechnen mit Hilfe der dividierten Differenz). Also folgt wegen der Linearität des Differenzenoperators

$$\Delta_h^r (f - e_r) \equiv 0 \quad \text{für alle } 0 < h \leq t.$$

Die Induktions-Annahme (5.6) lässt hieraus auf

$$f - e_r \in \mathcal{P}_{r-1}$$

schließen, und das bedeutet $f \in \mathcal{P}_r$.

□

5.5 Bemerkung. Für $f \in C^r(K)$ ist

$$\omega_{r+1}(f, t) \leq t\omega_r(f', t) \leq \dots \leq t^r \omega_1(f^{(r)}, t).$$

a) Falls zusätzlich für ein $0 < \alpha \leq 1$ noch

$$f^{(r)} \in \text{Lip}_\alpha := \left\{ g : \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \text{ beschränkt} \right\} = \{g : \omega_1(g, t) = \mathbf{O}(t^\alpha)\}$$

gilt, so folgt

$$\omega_{r+1}(f, t) \leq t^r \omega_1(f^{(r)}, t) = \mathbf{O}(t^{r+\alpha}).$$

b) Falls andererseits

$$f^{(r)} \in \mathcal{Z} := \left\{ g : \frac{|g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)|}{h} \text{ beschränkt} \right\} = \{g : \omega_2(g, t) = \mathbf{O}(t)\}$$

gilt, so folgt

$$\omega_{r+2}(f, t) \leq t^r \omega_2(f^{(r)}, t) = \mathbf{O}(t^{r+1}).$$

Die Menge \mathcal{Z} heißt Zygmund-Klasse. Sie ist echte Obermenge von Lip_1 (siehe Übung).

Wir können nun den quantitativen Approximationssatz von Jackson beweisen.

5.6 Satz (Jackson, 1912). *Es existiert $C > 0$ mit*

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) = \inf_{p \in \mathcal{T}_n} \|f - p\|_\infty \leq C \cdot \omega_2\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq 2C \cdot \omega\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt über Anwendung des Approximationssatzes mit dem Jackson-Kern

$$J_m(x) := w_{m,2} \left(\frac{\sin(m\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^4 \quad \text{mit} \quad w_{m,2}^{-1} := \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\sin(m\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^4 dx,$$

also $\int_{-1/2}^{1/2} J_m(x) dx = 1$, $J_m(x) \geq 0$ und $J_m(-x) = J_m(x)$, siehe Beispiel 4.12.

Der Approximationsgrad $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ wird ersetzt durch $\|f - f * J_m\|_\infty$, wobei $J_m \in \mathcal{T}_n$ gewählt wird, also

$$m = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & , \text{ für } n \text{ ungerade,} \\ \frac{n+2}{2} & , \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

(vergleiche Kapitel 4, $J_m = c_m F_{m-1}^2 \in \mathcal{T}_{2m-2}$).

Zur Fehlerabschätzung von $f - \underbrace{f * J_m}_{\in \mathcal{T}_n}$ verwenden wir die absoluten Momente von J_m .

Für $x \in \mathbb{T}$ ist

$$\begin{aligned} f(x) - (f * J_m)(x) &\stackrel{\text{Normiertheit von } J_m}{=} \int_{-1/2}^{1/2} (f(x) - f(x-y)) J_m(y) dy \\ &\stackrel{J_m \text{ gerade}}{=} \int_0^{1/2} \underbrace{(-f(x+y) + 2f(x) - f(x-y))}_{= -\Delta_y^2 f(x-y)} J_m(y) dy. \end{aligned}$$

Mit Lemma 5.4 (iii) erhalten wir die (bzgl. x gleichmäßige) Abschätzung

$$|\Delta_y^2 f(x - y)| \leq \omega_2(f, y) = \omega_2(f, ny \frac{1}{n}) \leq (1 + ny)^2 \omega_2(f, \frac{1}{n}).$$

Mit den absoluten Momenten von J_m in Lemma 4.19 folgt daraus

$$\begin{aligned} |f(x) - (f * J_m)(x)| &\leq \omega_2(f, \frac{1}{n}) \int_0^{1/2} (1 + ny)^2 J_m(y) dy \\ &\leq \omega_2(f, \frac{1}{n}) \left(\frac{1}{2} + \frac{c_1 n}{m} + \frac{c_2 n^2}{m^2} \right) \\ &\leq C \omega_2(f, \frac{1}{n}). \end{aligned}$$

□

5.7 Folgerung. a) Ist $f \in \text{Lip}(\alpha)$ für ein $0 < \alpha \leq 1$, so gilt $E_{\mathcal{T}_n}(f) = O(n^{-\alpha})$.

b) Ist $f \in \mathcal{Z}$, so gilt folgt $E_{\mathcal{T}_n}(f) = O(n^{-1})$.

5.8 Bemerkung. Korneichuk zeigte 1962

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq \omega\left(f, \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

mit bestmöglicher Konstante 1 vor dem Stetigkeitsmodul.

Um einen Approximations-Satz für differenzierbare Funktionen herzuleiten, beschaffen wir uns ein Analogon zum Jackson-Satz 5.6 mit Verwendung von Glattheitsmodulen höherer Ordnung $\omega_r(f, \frac{1}{n})$. Dies gelingt mit ähnlicher Beweistechnik und mit Hilfe des Jackson-Kerns $J_n^{(s)}$, $s = \lceil \frac{r+2}{2} \rceil$. Dabei verwenden wir wieder absolute Momente von $J_n^{(s)}$ der Ordnung r ; hierbei sind s und r so bestimmt, dass

$$\int_{-1/2}^{1/2} |y|^k J_n^{(s)}(y) dy \leq c_k n^{-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

für $k = 0, 1, \dots, 2s - 2 \geq r$ gilt, vgl. Lemma 4.19.

5.9 Satz. Für $r \in \mathbb{N}$ existiert $C_r > 0$ mit

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C_r \omega_r(f, \frac{1}{n}) \quad \text{für alle } f \in C_*[0, 1].$$

Beweis. 1. Wähle $s = \lceil \frac{r+2}{2} \rceil$ wie oben beschrieben.

2. Wähle m maximal mit $J_m^{(s)} \in \mathcal{T}_n$, also $m - 1 = \lfloor \frac{n}{s} \rfloor$ (wegen $J_m^{(s)} \in \mathcal{T}_{s(m-1)}$).

3. Wir arbeiten hier nicht mit dem Faltungsoperator $f \mapsto f * J_m^{(s)}$, sondern einer modifizierten Version $T_{m,s}$. Ziel ist es, aus dem Ausdruck $f(x) - (T_{m,s}f)(x)$ ein Integral mit r -ter Differenz von f zu erhalten. Deshalb definieren wir (zunächst rein formal)

$$T_{m,s}f(x) := f(x) - \int_0^1 \Delta_y^r f(x - ry) J_m^{(s)}(y) dy.$$

Es ist klar, dass $T_{m,s} : C_*[0, 1] \rightarrow C_*[0, 1]$ linear ist. Wegen der Normiertheit ($\int J_m^{(s)} = 1$) ergibt sich durch Auflösen des Differenzenoperators die Form

$$T_{m,s}f(x) := - \int_0^1 \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} f(x + (j-r)y) J_m^{(s)}(y) dy.$$

Wichtig daran ist, dass der letzte Summand verschwunden ist, also kein Term $f(x)$ im Integral steht. Für die übrigen Terme wird in Bemerkung 5.10 gezeigt:

$$p_k(x) := \int_0^1 f(x + ky) J_m^{(s)}(y) dy \in \mathcal{T}_n, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Dies ergibt also $T_{m,s} : C_*[0, 1] \rightarrow \mathcal{T}_n$ und

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq \|f - T_{m,s}(f)\|_\infty \quad \text{für alle } f \in C_*[0, 1].$$

4. Die Abschätzung von $\|f - T_{m,s}(f)\|_\infty$ ist nun analog zum Jackson-Satz 5.6:

$$\begin{aligned} |f(x) - (T_{m,s}f)(x)| &= \left| \int_0^1 \Delta_y^r f(x - ry) J_m^{(s)}(y) dy \right| \\ &\stackrel{(5.4)}{\leq} \int_{-1/2}^{1/2} \omega_r(f, y) J_m^{(s)}(y) dy \\ &\leq \omega_r(f, \tfrac{1}{n}) \int_{-1/2}^{1/2} (1 + n|y|)^r J_m^{(s)}(y) dy \\ &\leq \omega_r(f, \tfrac{1}{n}) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} n^k \int_{-1/2}^{1/2} |y|^k J_m^{(s)}(y) dy. \end{aligned}$$

Die Momente von $J_m^{(s)}$ kürzen gerade die Potenzen n^k , dadurch erhalten wir die Konstante C_{r+1} . \square

5.10 Bemerkung. Es sei $f \in C_*[0, 1]$ und $x \in \mathbb{R}$. Für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$ gilt:

- Falls k kein Teiler von ℓ ist, so ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x + ky) e^{2\pi i \ell y} dy &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_{1/k}^{1+1/k} f(x + k(y - \tfrac{1}{k})) e^{2\pi i \ell (y - \frac{1}{k})} dy \\ &= e^{-2\pi i \frac{\ell}{k}} \int_{1/k}^{1+1/k} f(x + ky) e^{2\pi i \ell y} dy \quad (f \text{ mit Periode } 1) \\ &\stackrel{\text{Per.}}{=} \underbrace{e^{-2\pi i \frac{\ell}{k}}}_{\neq 1} \int_0^1 f(x + ky) e^{2\pi i \ell y} dy. \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt der Integrationsbereich verschoben, was ja bei voller Periodenlänge 1 erlaubt ist. Also ist

$$\int_0^1 f(x + ky)e^{2\pi i \ell y} dy = 0.$$

- Falls k Teiler von ℓ ist, setze $j = \ell/k \in \mathbb{Z}$. Die Substitution $u = ky$ und Periodizität liefert

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x + ky)e^{2\pi i \ell y} dy &= \frac{1}{k} \int_0^k f(x + u)e^{2\pi i j u} du \\ &\stackrel{\text{Per. 1}}{=} \int_0^1 f(x + u)e^{2\pi i j u} du \\ &= \int_0^1 f(t)e^{2\pi i j(t-x)} dt \\ &= c_{-j}(f)e^{-2\pi i j x}. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gezeigt: für alle $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ ist

$$g(x) := \int_0^1 f(x + ky)p(y) dy \in \mathcal{T}_n$$

falls $p \in \mathcal{T}_n$.

5.11 Folgerung. *Es sei $f \in C_*^r[0, 1]$. Dann gilt*

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C_{r+1}\omega_{r+1}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{C_{r+1}}{n^r}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right),$$

also $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathbf{o}(n^{-r})$ für $n \rightarrow \infty$.

Ist $f \in C_*^r[0, 1]$ mit r -ter Ableitung $f^{(r)} \in \text{Lip}(\alpha)$ für ein $0 < \alpha < 1$, so gilt

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) = O(n^{-r-\alpha}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Ist $f \in C_*^r[0, 1]$ mit r -ter Ableitung $f^{(r)} \in \mathcal{Z}$ (Zygmund-Klasse), so gilt

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) = O(n^{-r-1}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Z.B. der letzte Teil folgt aus

$$E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C_{r+2}\omega_{r+2}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq \frac{C_{r+1}}{n^r}\omega_2\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) = \mathbf{O}(n^{-r-1}).$$

□

5.2 Umkehrsätze

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, dass die Approximationsordnung $E_{\mathcal{T}_n}(f) = O(n^{-\alpha})$ für $f \in \text{Lip}(\alpha)$ (bzw. $E_{\mathcal{T}_n}(f) = O(n^{-1})$ für $f \in \mathcal{Z}$) tatsächlich scharf ist. Mit anderen Worten, die Approximationsordnung charakterisiert die Lipschitzordnung von f . Dazu benötigen wir grundlegende Aussagen für trigonometrische Polynome, wie sie z.B. in der Numerik I stehen.

5.12 Satz. *Die Menge \mathcal{T}_n der reell-wertigen trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$ ist ein Haarscher Raum der Dimension $2n + 1$. D.h. jedes $p \in \mathcal{T}_n$, $p \neq 0$, hat höchstens $2n$ Nullstellen im halboffenen Intervall $[0, 1)$ unter Berücksichtigung der Vielfachheit.*

Beweis. Wir setzen $z = e^{2\pi ix} \in \mathbb{C}$. Jedes trigonometrische Polynom $p \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^n c_k z^k = z^{-n} \sum_{k=0}^{2n+1} c_{k-n} z^k.$$

mit Koeffizientenvektor $(c_{-n}, \dots, c_n) \neq 0$. Die letzte Summe stellt ein Polynom $q \neq 0$ vom Grad $2n + 1$ dar, hat also nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens $2n$ komplexe Nullstellen unter Berücksichtigung der Vielfachheit. Davon liegen höchstens $2n$ auf dem Einheitskreis, also hat p höchstens $2n$ Nullstellen in $[0, 1)$. \square

Diese Eigenschaft der trigonometrischen Polynome lässt sich ausnutzen, um das Verhältnis von Ableitungswerten zu Funktionswerten von $p \in \mathcal{T}_n$ auszudrücken.

5.13 Satz (Bernstein-Ungleichung). *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathcal{T}_n$ gilt*

$$\|p'\|_{\infty} \leq 2\pi n \|p\|_{\infty}. \quad (5.11)$$

5.14 Bemerkung. Der Differentialoperator $D : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$, $Dp = p'$ ist linear. Weil \mathcal{T}_n endlich-dimensional ist, ist D automatisch beschränkt. Am Beispiel $p(x) = \sin(2\pi n x)$ sieht man, dass die Operatornorm von D mindestens $2\pi n$ ist. Die Bernstein-Ungleichung gibt $\|D\|_{\mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n} = 2\pi n$ an.

Anstelle der Bernstein-Ungleichung beweisen wir eine etwas schärfere Ungleichung, die punktweise Abschätzungen liefert.

5.15 Satz (Ungleichung von Szegö). *Für $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathcal{T}_n$ und $x \in \mathbb{T}$ gilt*

$$|p'(x)| \leq 2\pi n \sqrt{\|p\|_{\infty}^2 - |p(x)|^2}. \quad (5.12)$$

Beweis. von Satz 5.15.

Wir führen den Beweis durch Kontraposition. Dazu führen wir die Annahme, es existiere $p \in \mathcal{T}_n$ mit

$$\|p\|_{\infty} < 1, \quad p'(0) = 2\pi n \sqrt{1 - |p(0)|^2}$$

zum Widerspruch. (Hier darf o.B.d.A. angenommen werden, dass die Ungleichung (5.12) bei $x = 0$ verletzt ist, indem auf beiden Seiten der Ungleichung das Argument x verschoben wird. Außerdem darf durch Vorzeichenwahl $p'(0) \geq 0$ angenommen werden.)

1. Wähle $\alpha \in (-\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n})$ mit $p(0) = \sin(2\pi n\alpha)$. Dies ist möglich wegen $|p(0)| \leq \|p\|_\infty < 1$.
2. Setze $q(x) = \sin 2\pi n(x + \alpha) - p(x)$, also $q \in \mathcal{T}_n$ mit $q \neq 0$ (weil $\|p\|_\infty < 1$) und doppelter Nullstelle

$$q(0) = q'(0) = 0.$$

3. Die Punkte

$$x_k = \alpha + \frac{(2k+1)}{4n}, \quad 0 \leq k \leq 2n-1,$$

sind paarweise verschiedene Punkte in $(0, 1)$. Es sind die Extremalstellen von $\sin 2\pi n(x - \alpha)$, also ist (wiederum wegen $\|p\|_\infty < 1$)

$$\text{sign } q(x_k) = \text{sign } \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k, \quad 0 \leq k \leq 2n-1.$$

Dies ergibt mit dem Zwischenwertsatz $2n-1$ Nullstellen von q in $(0, 1)$. Zusammen mit der doppelten Nullstelle in $x = 0$ sind dies $2n+1$ Nullstellen, im Widerspruch zur Haarschen Bedingung.

□

Mit diesen Hilfsmitteln ist es möglich, einen Umkehrsatz in schwacher Form zu beweisen. Der Beweis ist sehr trickreich, benutzt verschiedene Argumente der Analysis, unter anderem eine Verdichtung von Summen wie bei der Konvergenz-/Divergenzanalyse der harmonischen Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}$ sowie eine Darstellung von p'_n mit Hilfe einer Teleskopsumme.

5.16 Satz. Für $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $M_r > 0$ so, dass für alle $f \in C_*[0, 1]$ und $\delta > 0$

$$\omega_r(f, \delta) \leq M_r \delta^r \sum_{n=0}^{\lfloor 1/\delta \rfloor} (n+1)^{r-1} E_{\mathcal{T}_n}(f)$$

gilt.

Beweis. Es sei $f \in C_*[0, 1]$. Wir schreiben kurz $E_n = E_{\mathcal{T}_n}(f)$ und p_n für ein Proximum von f in \mathcal{T}_n .

1. Für $\delta \geq 1$ ergeben die Eigenschaften von ω_r sofort

$$\omega_r(f, \delta) = \omega_r(f - p_0, \delta) \leq 2^r \|f - p_0\| = 2^r E_0.$$

2. Sei nun $0 < \delta < 1$. Die Dreiecksungleichung und weitere Eigenschaften von ω_r ergeben

$$\omega_r(f, \delta) \leq \omega_r(f - p_n, \delta) + \omega_r(p_n, \delta) \leq 2^r \|f - p_n\| + \delta^r \|p_n^{(r)}\| = 2^r E_n + \delta^r \|p_n^{(r)}\| \quad (5.13)$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen nun:

$$(i) \quad E_{2^k} \leq r 2^{-rk} \sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1} E_j,$$

$$(ii) \quad \|p_{2^k}^{(r)}\| \leq 2^{2r+1} \sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1} E_j.$$

Sodann folgt die Behauptung des Satzes: Wahl von $k \in \mathbb{N}_0$ mit $2^k \leq \delta^{-1} < 2^{k+1}$ ergibt sofort $2^{-rk} \leq 2^r \delta^r$, dies eingesetzt in (5.13) mit $n = 2^k$ ergibt

$$\omega_r(f, \delta) \leq (r 2^{2r} + 2^{2r+1}) \delta^r \sum_{j=0}^{[1/\delta]} (j+1)^{r-1} E_j.$$

Zu Aussage (i): Die Folge $(E_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend. Also ist

$$\sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1} E_j \geq E_{2^k} \sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1}.$$

Die letzte Summe wird abgeschätzt durch

$$\sum_{j=0}^{2^k} (j+1)^{r-1} \geq \int_0^{2^k} x^{r-1} dx = \frac{2^{kr}}{r}.$$

Durch Umstellen der Ungleichung folgt Aussage (i).

Zu Aussage (ii): Wegen $p_0^{(r)} = 0$ können wir $p_{2^k}^{(r)}$ als Teleskopsumme

$$p_{2^k}^{(r)} = p_1^{(r)} - p_0^{(r)} + \sum_{j=0}^{k-1} (p_{2^{j+1}}^{(r)} - p_{2^j}^{(r)})$$

schreiben. Anwendung der Dreiecksungleichung und der Bernstein-Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} \|p_{2^k}^{(r)}\| &\leq \|p_1^{(r)} - p_0^{(r)}\| + \sum_{j=0}^{k-1} \|p_{2^{j+1}}^{(r)} - p_{2^j}^{(r)}\| \\ &\leq \|p_1 - p_0\| + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{(j+1)r} \|p_{2^{j+1}} - p_{2^j}\|. \end{aligned}$$

Wir schätzen weiter ab mit $\|p_k - p_\ell\| \leq E_k + E_\ell$ und erhalten aus der Monotonie der E_k

$$\|p_{2^k}^{(r)}\| \leq E_0 + E_1 + 2^{r+1} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{jr} E_{2^j}.$$

Die Monotonie ergibt weiterhin für alle $j \geq 1$

$$2^{jr} E_{2^j} = 2^r 2^{(j-1)(r-1)} (2^{j-1} E_{2^j}) \leq 2^r 2^{(j-1)(r-1)} \sum_{\ell=2^{j-1}+1}^{2^j} E_\ell \leq 2^r \sum_{\ell=2^{j-1}+1}^{2^j} (\ell+1)^{r-1} E_\ell,$$

also insgesamt

$$\left\| p_{2^k}^{(r)} \right\| \leq E_0 + (2^{r+1} + 1)E_1 + 2^{2r+1} \sum_{\ell=2}^{2^k-1} (\ell+1)^{r-1} E_\ell.$$

Diese Ungleichung ergibt dann die Aussage (ii). \square

Folgerungen für die Lipschitz- und Zygmund-Klassen:

5.17 Folgerung. a) Für $0 < \alpha < 1$ und $f \in C_*[0, 1]$ gilt

$$f \in \text{Lip}(\alpha) \iff E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathcal{O}(n^{-\alpha}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

b) Für $f \in C_*[0, 1]$ gilt

$$f \in \mathcal{Z} \iff E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathcal{O}(n^{-1}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Für beide Aussagen ist die Implikation „ \implies “ der bereits bewiesene Jackson-Satz.

Um die Rückrichtungen zu zeigen, wählen wir $0 < \delta < 1$. Für a) wählen wir $C > 0$ so, dass $n^\alpha E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann folgt mit der Konstanten M_1 aus Satz 5.16

$$\omega(f, \delta) \leq M_1 \delta \sum_{j=0}^{[1/\delta]} E_{\mathcal{T}_j}(f) \leq M_1 \delta E_{\mathcal{T}_0}(f) + M_1 C \delta \sum_{j=1}^{[1/\delta]} j^{-\alpha}.$$

Die letzte Summe wird wieder durch ein Integral abgeschätzt: Für $0 < \alpha < 1$ ist

$$\sum_{j=1}^{[1/\delta]} j^{-\alpha} \leq 1 + \int_1^{\delta^{-1}} x^{-\alpha} dx = 1 + \frac{\delta^{-(1-\alpha)} - 1}{1 - \alpha}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\omega(f, \delta) \leq M_1 \delta E_{\mathcal{T}_0}(f) + M_1 C \delta + \frac{M_1 C}{1 - \alpha} \delta^\alpha (1 - \delta^{1-\alpha}) \leq M' \delta^\alpha,$$

mit $M' := M_1(E_{\mathcal{T}_0}(f) + C + \frac{C}{1-\alpha})$. Also ist $f \in \text{Lip}(\alpha)$.

Für b) wählen wir $C > 0$ wieder so, dass $n E_{\mathcal{T}_n}(f) \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann folgt mit der Konstanten M_2 aus Satz 5.16

$$\omega_2(f, \delta) \leq M_2 \delta^2 \sum_{j=0}^{[1/\delta]} (j+1) E_{\mathcal{T}_j}(f) \leq M_2 \delta^2 E_{\mathcal{T}_0}(f) + M_2 C \delta^2 \sum_{j=1}^{[1/\delta]} (1 + j^{-1}).$$

Die letzte Summe wird durch $2\delta^{-1}$ abgeschätzt und die Behauptung

$$\omega_2(f, \delta) = \mathcal{O}(\delta)$$

folgt sofort. \square

5.18 Bemerkung. Der Beweis der Äquivalenz in Teil a) bricht tatsächlich für $\alpha = 1$ zusammen: die Abschätzung der Summe $\sum_{j=1}^{[1/\delta]} j^{-1}$ führt auf

$$\omega(f, \delta) \leq M' \delta \ln(\delta^{-1}).$$

Zusammen mit Teil b) folgt also insbesondere die Beziehung

$$f \in \mathcal{Z} \implies \omega(f, \delta) = \mathcal{O}(\delta \ln \delta^{-1}).$$

Dies ist offensichtlich schwächer als die Beziehung für Funktionen in $\text{Lip}(1)$. Aber auch hier gilt die Umkehrung **nicht**: die Klasse der stetigen Funktionen mit $\omega(f, \delta) = \mathcal{O}(\delta \ln \delta^{-1})$ ist größer als die Zygmund-Klasse.

Für differenzierbare Funktionen gilt der Umkehrsatz entsprechend.

5.19 Satz. a) Für $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ und $f \in C_*[0, 1]$ gilt

$$f \in C_*^k[0, 1] \text{ und } f^{(k)} \in \text{Lip}(\alpha) \iff E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathcal{O}(n^{-k-\alpha}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

b) Für $f \in C_*[0, 1]$ gilt

$$f \in C_*^k[0, 1] \text{ und } f^{(k)} \in \mathcal{Z} \iff E_{\mathcal{T}_n}(f) = \mathcal{O}(n^{-k-1}) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir brauchen wieder nur die Umkehrrichtung „ \Leftarrow “ zu zeigen. Hierfür fassen wir beide Fälle zusammen zu $0 < \alpha \leq 1$ und wählen $C > 0$ mit $n^{k+\alpha} E_k \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

1. Differenzierbarkeit von f : Die Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ der Proxima $p_k \in \mathcal{T}_k$ konvergiert gleichmäßig gegen f . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$f - p_n = \lim_{j \rightarrow \infty} (p_{2^j n}) - p_n = \sum_{j=0}^{\infty} (p_{2^{j+1}n} - p_{2^j n});$$

insbesondere konvergiert diese Reihe gleichmäßig gegen $f - p_n \in C_{2\pi}$. Die Reihe der ν -ten Ableitungen, mit $1 \leq \nu \leq k$, wird mit der Bernstein-Ungleichung abgeschätzt zu

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} (p_{2^{j+1}n}^{(\nu)} - p_{2^j n}^{(\nu)}) \right\| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\| p_{2^{j+1}n}^{(\nu)} - p_{2^j n}^{(\nu)} \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (2^{j+1}n)^{\nu} \|p_{2^{j+1}n} - p_{2^j n}\| \\ &\leq 2 \sum_{j=0}^{\infty} (2^{j+1}n)^{\nu} E_{2^j n}^*(f) \\ &\leq 2^{\nu+1} C \sum_{j=0}^{\infty} (2^j n)^{\nu} (2^j n)^{-k-\alpha} \\ &\leq 2^{k+1} C \sum_{j=0}^{\infty} (2^j n)^{-\alpha} \\ &= \frac{2^{k+1} C}{1 - 2^{-\alpha}} n^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Also konvergieren all diese Reihen ebenfalls gleichmäßig. Die Funktion $f - p_n$ ist also k -mal stetig differenzierbar und die Ableitungen von $f - p_n$ werden durch gliedweise Differentiation der Reihe erzielt. Damit ist aber auch f selbst k -mal stetig differenzierbar.

2. Wir haben gerade gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\|f^{(k)} - p_n^{(k)}\| \leq \frac{2^{k+1}C}{1 - 2^{-\alpha}} n^{-\alpha}$$

gilt. Damit ist aber auch $E_{\mathcal{T}_n}(f^{(k)}) \leq \|f^{(k)} - p_n^{(k)}\| = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$, und die Behauptung $f^{(k)} \in \text{Lip}(\alpha)$ bzw. $f^{(k)} \in \mathcal{Z}$ folgt aus Satz 5.17. \square

5.3 Weitere Aussagen

Im letzten Beweis wurde schon verwendet, dass die k -te Ableitung des Proximums p_n an f eine gute Approximation an $f^{(k)}$ ist. Als weitere Anwendung der Bernstein-Ungleichung kann man sogar zeigen, dass $p_n^{(k)}$ “fast” so gut wie das Proximum $q_n \in \mathcal{T}_n$ von $f^{(k)}$ ist. Man spricht daher von Simultanapproximation von f durch sein Proximum p_n , da Ableitungen von f automatisch gut approximiert werden.

5.20 Satz. *Zu $r \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $c_r > 0$ so, dass für alle Funktionen $f \in C_*^r[0, 1]$ und ihr Proximum $p_n \in \mathcal{T}_n$ gilt*

$$\|f^{(r)} - (p_n)^{(r)}\| \leq c_r E_{\mathcal{T}_n}(f^{(r)}).$$

Die Jackson-Sätze lieferten Aussagen zur Approximationsgüte von Funktionen in Lipschitz- oder Zygmund-Klassen. Gibt es auch Funktionen $f \in C_*[0, 1]$, die in keiner Lipschitz-Klasse Lip_α mit $\alpha > 0$ gehören? Zusammen mit dem Umkehrsatz wird diese Frage mit “Ja” beantwortet, nachdem folgendes Resultat über “beliebig langsame Approximation” angegeben wurde.

5.21 Satz (Lethargie-Theorem von Bernstein). *Zu jeder monoton fallenden Nullfolge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ existiert $f \in C_*[0, 1]$ mit $E_{\mathcal{T}_n}(f) = \epsilon_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.*

Damit ist also klar, dass $C_*[0, 1] \setminus \text{Lip}_\alpha$ viele Funktionen enthält: Wahl von $\epsilon_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$ oder $\epsilon_n = \frac{1}{\ln \ln(n+20)}$ liefert Funktionen f , für die $E_{\mathcal{T}_n}(f)$ extrem langsam gegen Null konvergiert, auf jeden Fall langsamer als jedes $n^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$.

6 Approximation in $C[a, b]$

Einige Aussagen zur periodischen Approximation lassen sich mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \arccos x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \leftrightarrow \quad x = \cos 2\pi\xi \in [-1, 1] \quad (6.1)$$

auf den Raum der stetigen Funktionen auf $[-1, 1]$ übertragen. Diese Koordinatentransformation ist stetig, allerdings nicht-linear und auch nicht differenzierbar; insbesondere am Rand des Intervalls $[-1, 1]$ entstehen dadurch ‘‘Verzerrungen’’, die durch geschickte Modifikationen der Approximations-Aussagen behandelt werden.

Zunächst soll aber der Zusammenhang von $C[-1, 1]$ und $C_*[0, 1]$ erläutert werden. Dazu betrachten wir den Teilraum der **geraden** Funktionen $\tilde{f} \in C_*[0, 1]$ mit

$$\tilde{f}(\xi) = \tilde{f}(1 - \xi).$$

6.1 Lemma. a) Jeder stetigen Funktion $f \in C[-1, 1]$ wird mittels der Koordinatentransformation (6.1) eine **gerade** periodische Funktion $\tilde{f} \in C_*[0, 1]$ zugeordnet,

$$\tilde{f}(\xi) = f(\cos 2\pi\xi), \quad \xi \in [0, 1].$$

Dabei gilt $\|\tilde{f}\|_{\infty, [0, 1]} = \|f\|_{\infty, [-1, 1]}$.

b) Jedem reellwertigen Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ wird mittels der Koordinatentransformation (6.1) ein **gerades** reellwertiges trigonometrisches Polynom $\tilde{p} \in \mathcal{T}_n$ zugeordnet.

Beweis. Teil a) ist sofort klar. In Teil b) sieht man mit Hilfe der Eulerschen Formel, dass

$$(\cos 2\pi\xi)^k = 2^{-k} (e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi})^k = 2^{-k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} e^{2\pi i(k-2j)\xi}$$

reellwertig und gerade ist: die Summanden mit Index j und $k - j$ ergeben zusammen

$$\binom{k}{j} e^{2\pi i(k-2j)\xi} + \binom{k}{k-j} e^{2\pi i(2j-k)\xi} = 2 \binom{k}{j} \cos 2\pi(k-2j)\xi.$$

□

Sogar die Proxima von $f \in C[-1, 1]$ und von $\tilde{f} \in C_*[0, 1]$ entsprechen einander.

6.2 Lemma. Das Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ ist genau dann Proximum der stetigen Funktion $f \in C[-1, 1]$, wenn das zugehörige gerade trigonometrische Polynom $\tilde{p} \in \mathcal{T}_n$ Proximum von $\tilde{f} \in C_*[0, 1]$ mit $\tilde{f}(\xi) = f(\cos 2\pi\xi)$ ist.

Beweis. Übung. □

Eine direkte Übertragung der Ergebnisse wird aber dadurch schwierig, dass die Bildung von Differenzen zur Schrittweite $0 < h \leq t$ im Stetigkeitsmodul $\omega(\tilde{f}, t)$ nicht mehr mit entsprechenden Differenzen von f übereinstimmt: es gilt vielmehr mit $x = \cos(2\pi\xi)$ und $\xi \in [0, 1]$, dass

$$\cos(2\pi\xi + \tau) = \cos 2\pi\xi \cos \tau - \sin 2\pi\xi \sin \tau = x \cos \tau - \sqrt{1-x^2} \sin \tau,$$

also

$$|\tilde{f}(\xi + \frac{\tau}{2\pi}) - \tilde{f}(\xi)| = |f(\cos(2\pi\xi + \tau)) - f(\cos 2\pi\xi)| = |f(x \cos \tau - \sqrt{1-x^2} \sin \tau) - f(x)|.$$

Man sieht hieran, dass die Schrittweite τ an der Stelle $\xi \in [0, 1]$ zu einer Schrittweite

$$h_\tau(x) = x(\cos \tau - 1) - \sqrt{1-x^2} \sin \tau \quad \text{an der Stelle} \quad x = \cos 2\pi\xi \in [-1, 1] \quad (6.2)$$

verzerrt wird, die vom Punkt x abhängt. Dies wird durch die Timan-Sätze in Abschnitt 6.1 berücksichtigt, indem punktweise Fehlerabschätzungen angegeben werden. Demgegenüber wird von Ditzian und Totik in Abschnitt ?? eine Modifikation in der Definition des Stetigkeitsmoduls von $f \in C[-1, 1]$ verwendet.

6.1 Timan-Sätze

Die Sätze vom Timan-Typ liefern **punktweise** Abschätzungen von Approximationen, die im Allgemeinen nicht durch das Proximum an f , sondern z.B. durch die Anwendung linearer Integraloperatoren erzielt werden. Das Besondere an diesen Abschätzungen ist, dass der Parameter $t = \sigma(x)$ der maximalen Schrittweite des Stetigkeitsmoduls $\omega(f, t)$ von der betrachteten Stelle $x \in [-1, 1]$ abhängt. Dadurch wird der Verzerrung, die die Koordinatentransformation bewirkt, geeignet Rechnung getragen. Man beachte im Folgenden, dass $t = \sigma(x)$ kleiner wird, je näher x am Rand des Intervalls liegt. Dadurch kann ein **schärferer** Jackson-Satz (d.h. mit zum Rand abnehmender Schrittweite t) und ein entsprechender Umkehrsatz erzielt werden.

Zur Motivation der folgenden Definition betrachten wir die ersten Glieder in der Taylor-Entwicklung der Kosinus- und Sinusfunktion in (6.2). Für kleine Schrittweiten $\pm\tau$ ist (bis auf konstante Vielfache)

$$|h_\tau(x)| \approx \frac{|x|}{2}\tau^2 + \sqrt{1-x^2}\tau \approx \max\{\tau^2, \sqrt{1-x^2}\tau\}.$$

Die Werte $\tau = 1/n$ im Jackson-Satz für trigonometrische Polynome führen uns zu folgender Begriffsbildung.

6.3 Definition. Für $x \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\delta_n(x) = \max\left\{\sqrt{1-x^2}, \frac{1}{n}\right\}, \quad \sigma_n(x) = \frac{\delta_n(x)}{n}.$$

Die Funktion δ_n hat Knickstellen bei $\pm x_n = \pm(1 - \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$ und wird für $1 \geq |x| > x_n$ konstant durch $\frac{1}{n}$ fortgesetzt. Wegen $(\sqrt{1-x^2})'|_{x=-x_n} = nx_n < n$ ergibt sich die Ungleichung

$$|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| \leq |x - y|. \quad (6.3)$$

Wir nutzen auch häufig die Ungleichungen

$$\sigma_{2n}(y) \leq \frac{1}{2} \sigma_n(y) \leq 2\sigma_{2n}(y), \quad (6.4)$$

die leicht einzusehen sind; sie besagen ja gerade

$$\frac{1}{2n} \max \left\{ \sqrt{1-y^2}, \frac{1}{2n} \right\} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \max \left\{ \sqrt{1-y^2}, \frac{1}{n} \right\} \leq 2 \cdot \frac{1}{2n} \max \left\{ \sqrt{1-y^2}, \frac{1}{2n} \right\}.$$

Nach diesen Vorbetrachtungen formulieren wir den Satz zur punktweisen Approximation nach Timan (1951).

6.4 Satz. *Es existiert $M > 0$ so, dass es für alle $f \in C[-1, 1]$ Polynome $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ gibt mit*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M\omega \left(f, \frac{\delta_n(x)}{n} \right), \quad x \in [-1, 1].$$

Beweis. Zu $\tilde{f}(\xi) = f(\cos(2\pi\xi)) = f(x)$ bildet man

$$\tilde{p}_n = \tilde{f} * J_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(\cos(2\pi \cdot + \tau)) J_m\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) d\tau$$

mit dem Jackson-Kern $J_m \in \mathcal{T}_n$, $m = [\frac{n+1}{2}]$ wie in Kapitel ?? . Bei der Abschätzung von

$$f(x) - p_n(x) = \tilde{f}(\xi) - \tilde{p}_n(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(\xi) - \tilde{f}(\xi + \frac{\tau}{2\pi})) J_m\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) d\tau$$

wird dann auf den Stetigkeitsmodul von f “umgeschaltet”:

$$|\tilde{f}(\xi) - \tilde{f}(\xi + \frac{\tau}{2\pi})| = |f(\cos 2\pi\xi) - f(\cos(2\pi\xi + \tau))| = |f(x) - f(x + h_\tau(x))| \leq \omega(f, |h_\tau(x)|),$$

und mit (6.2) sowie $|\cos \tau - 1| = 2 \sin^2(\tau/2) \leq \tau^2/2$ ist

$$\begin{aligned} |h_\tau(x)| &\leq |x(\cos \tau - 1)| + \sqrt{1-x^2} |\sin \tau| \leq \frac{\tau^2}{2} + \sqrt{1-x^2} |\tau| \\ &\leq \left(\frac{n^2 \tau^2}{2} + \sqrt{1-x^2} n |\tau| \right) \max \left\{ \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \frac{1}{n^2} \right\} = \left(\frac{n^2 \tau^2}{2} + \sqrt{1-x^2} n |\tau| \right) \sigma_n(x). \end{aligned}$$

Der Rest folgt mit den Abschätzungen der Momente von J_m . □

6.5 Folgerung. *Es sei $0 < \alpha \leq 1$. Dann existieren zu $f \in \text{Lip}(\alpha)$ Polynome $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M \left(\frac{\delta_n(x)}{n} \right)^\alpha, \quad x \in [-1, 1].$$

Die Polynome p_n haben also die Approximationsordnung $\mathcal{O}(n^{-\alpha})$ im Inneren des Intervalls und sogar $\mathcal{O}(n^{-2\alpha})$ am Rand des Intervalls.

6.6 Bemerkung. Weitere Aussagen lassen sich für differenzierbare Funktionen $f \in C^r[-1, 1]$ erzielen.

- (a) Mit ähnlichen Methoden wie im trigonometrischen Fall folgt die Existenz von Polynomen $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M_r \left(\frac{\delta_n(x)}{n} \right)^r \omega \left(f^{(r)}, \left(\frac{\delta_n(x)}{n} \right) \right), \quad x \in [-1, 1].$$

Dabei ist M_r wieder eine Konstante, die nicht von f , x und n abhängt.

- (b) Viel schwieriger war die Konstruktion von Polynomen p_n mit

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M_r \omega_r \left(f, \frac{\delta_n(x)}{n} \right), \quad x \in [-1, 1],$$

die Brudnyi erst im Jahr 1968 gelang³. Der Fall $r = 2$ wurde bereits vorher von Dzyadyk (1958) und Freud (1959) behandelt. Damit ergab sich in Ergänzung zu Korollar 6.5

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M \frac{\delta_n(x)}{n}, \quad x \in [-1, 1],$$

für alle f aus der Zygmund-Klasse.

Dass der Jackson-Satz „scharf“ ist, zeigt der folgende Umkehrsatz.

6.7 Satz. Seien $f \in C[-1, 1]$ und $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ein „abstrakter Stetigkeitsmodul“, d.h. w ist stetig, monoton wachsend, erfüllt die Dreiecksungleichung $w(t_1 + t_2) \leq w(t_1) + w(t_2)$ sowie $\lim_{t \rightarrow 0^+} w(t) = 0$.

Wenn es Polynome $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ gibt mit

$$|f(x) - p_n(x)| \leq w \left(\frac{\delta_n(x)}{n} \right), \quad x \in [-1, 1],$$

so folgt für den **globalen** Stetigkeitsmodul von f

$$\omega(f, \delta) \leq M\delta \int_{\delta}^1 w(s) s^{-2} ds \leq M\delta \sum_{n=1}^{[1/\delta]} w \left(\frac{1}{n} \right),$$

für alle $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$. Dabei ist $M > 0$ eine Konstante, die nicht von f , δ oder w abhängt.

Beweis. Die Abschätzung des Integrals durch die Summe ist gültig aufgrund der Monotonie der Funktion w .

Der Beweis verläuft ähnlich zu Satz 5.16. Zuerst wird für $0 < h \leq \delta \leq \frac{1}{4}$ und $x \in [-1, 1-h]$ die Differenz $\Delta_h f(x)$ betrachtet. Mit $J := [x, x+h]$ und $a := \min_{y \in J} |y|$, $b := \max_{y \in J} |y|$ ist

$$\sigma_k(b) \leq \sigma_k(y) \leq \sigma_k(a) \quad \text{für alle } y \in J. \quad (6.5)$$

³ Brudnyi, Ju. A., Approximation of functions by algebraic polynomials. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 32, 1968, 780–787 (MR0234175 (38 #2493))

Da w monoton wachsend ist, folgt für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\Delta_h f(x)| &= |f(x+h) - f(x)| \\ &\leq |(f - p_{2^k})(x+h)| + |(f - p_{2^k})(x)| + |p_{2^k}(x+h) - p_{2^k}(x)| \\ &\leq 2w(\sigma_{2^k}(a)) + \delta |p'_{2^k}(y)| \end{aligned} \quad (6.6)$$

mit einem $y \in J$.

Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sigma_{2^{k+1}}(b) < \delta \leq \sigma_{2^k}(b) =: z \quad (6.7)$$

gilt; dies ist wegen $\sigma_2(b) \geq \frac{1}{4} \geq \delta$, der Monotonie von $\sigma_n(x)$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(b) = 0$ möglich. Man beachte, dass auch

$$\delta \leq z \stackrel{(6.4)}{\leq} 4\delta \quad \text{und} \quad z \leq \frac{1}{2}$$

gilt.⁴

Für den ersten Term in (6.6) verwenden wir die Beziehungen (6.3) und (6.5), also

$$0 \stackrel{(6.5)}{\leq} \sigma_{2^k}(a) - \sigma_{2^k}(b) \stackrel{(6.3)}{\leq} b - a.$$

Zusammen mit (6.7) und $b - a \leq h \leq \delta$ ergibt sich

$$\sigma_{2^k}(a) \leq \sigma_{2^k}(b) + (b - a) \leq 2z.$$

Mit der Monotonie und der Dreiecksungleichung für w wird der erste Term in (6.6) durch

$$2w(\sigma_{2^k}(a)) \leq 2w(2z) \leq 4w(z)$$

und dies weiter durch das Integral

$$4w(z) = \frac{4z}{1-z} \int_z^1 w(z)s^{-2} ds \leq 8z \int_z^1 w(s)s^{-2} ds \leq 32\delta \int_\delta^1 w(s)s^{-2} ds$$

abgeschätzt.

Der wesentliche Teil des Beweises wird wieder die Abschätzung von $p'_{2^k}(y)$ sein.

1. Für alle $j \in \mathbb{N}$ und $y \in J$ ergeben die Ungleichungen (6.4) und die Dreiecksungleichung für w

$$w(\sigma_{2^j}(y)) \leq w(4\sigma_{2^{j+1}}(y)) \leq 4w(\sigma_{2^{j+1}}(y)). \quad (6.8)$$

Durch das Einschieben von f folgt aus der Voraussetzung des Satzes

$$|p_{2^{j+1}}(y) - p_{2^j}(y)| \leq 5w(\sigma_{2^{j+1}}(y)), \quad y \in [-1, 1].$$

⁴Hier ist der erste wesentliche Unterschied zum Beweis von Satz 5.16: δ und 2^k werden nicht direkt, sondern über die Schrittweitenfunktion σ_{2^k} auf dem Intervall J aneinander gekoppelt.

2. Als Ersatz für die Bernstein-Ungleichung im Beweis von Satz 5.16⁵ wird Satz 2.3 in Kapitel 8 von [DeVore,Lorentz] verwendet (der Satz geht auf Lebed (1957) und Brudnyi (1959) zurück). Aus der obigen Abschätzung folgt nämlich

$$|(p_{2^{j+1}} - p_{2^j})'(y)| \leq \frac{5C}{\sigma_{2^{j+1}}(y)} w(\sigma_{2^{j+1}}(y)), \quad y \in [-1, 1],$$

mit einer Konstanten C , die nicht von j und y abhängt.

3. Mit $p_1 \in \mathcal{P}_0$, also $p_1' = 0$, lässt sich $p_{2^k}'(y)$ als Teleskopsumme schreiben und abschätzen durch

$$\begin{aligned} |p_{2^k}'(y)| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |(p_{2^{j+1}} - p_{2^j})'(y)| \leq 5C \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\sigma_{2^{j+1}}(y)} w(\sigma_{2^{j+1}}(y)) \\ &\stackrel{(6.4)}{\leq} 5C \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\sigma_{2^j}(y) - \sigma_{2^{j+1}}(y)}{(\sigma_{2^{j+1}}(y))^2} w(\sigma_{2^{j+1}}(y)) \stackrel{(6.4)}{\leq} 5C \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\sigma_{2^{j+1}}(y)}^{\sigma_{2^j}(y)} \frac{16}{s^2} w(s) ds \\ &= 80C \int_{\sigma_{2^k}(y)}^{\sigma_1(y)} s^{-2} w(s) dx \stackrel{(6.5)(6.7)}{\leq} 80C \int_{\delta}^1 s^{-2} w(s) ds. \end{aligned}$$

□

6.8 Folgerung. *Es sei $0 < \alpha \leq 1$. Die Funktion $f \in C[-1, 1]$ ist genau dann in $\text{Lip}(\alpha)$ (für $0 < \alpha < 1$) bzw. \mathcal{Z} (für $\alpha = 1$), wenn Polynome $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ existieren mit*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq M \left(\frac{\delta_n(x)}{n} \right)^\alpha, \quad x \in [-1, 1].$$

Insgesamt können wir also festhalten, dass die Timan-Sätze die Güte der **punktweisen** Approximation durch algebraische Polynome beschreiben. Durch geeignete lineare Integraloperatoren $L_n : C[-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_n$ wird eine bessere Approximation als

$$|f(x) - L_n f(x)| \leq C\omega(f, 1/n)$$

an Stellen x erzielt, die nahe am Rand des Intervalls liegen, nämlich

$$|f(x) - L_n f(x)| \leq C\omega(f, \sigma_n(x)).$$

Damit lassen sich im letzten Korollar die üblichen Lipschitz- bzw. Zygmund-Klassen charakterisieren.

⁵Hier ist also die zweite wesentliche Abweichung von Satz 5.16.

6.2 Sätze von Ditzian und Totik

Eine ganz andere Sichtweise entwickelten Ditzian und Totik, zusammengefasst in ihrem Buch „Moduli of Smoothness“ (Springer, 1987). Hier wird der Stetigkeitsmodul $\omega(f, t)$ für $f \in C[-1, 1]$ durch ein neues Glattheitsmaß ersetzt. Dadurch entstehen scharfe Jackson-Sätze für das Proximum an f .

Wir bezeichnen mit $\tilde{\Delta}_y f(x) = f(x + \frac{y}{2}) - f(x - \frac{y}{2})$ die **zentrierte Differenz** zur Schrittweite y .

6.9 Definition. Es sei $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$ für $x \in [-1, 1]$. Der **gewichtete Stetigkeitsmodul von Ditzian und Totik** ist definiert als

$$\omega_\varphi(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \sup_x \left| \tilde{\Delta}_{h\varphi(x)} f(x) \right|.$$

Hierbei wird $\tilde{\Delta}_y f(x) = 0$ gesetzt, falls $x + \frac{y}{2}$ oder $x - \frac{y}{2}$ außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ liegen.

Der gewichtete Stetigkeitsmodul r -ter Ordnung wird analog definiert durch

$$\omega_{r,\varphi}(f, t) := \sup_{0 < h \leq t} \sup_x \left| \tilde{\Delta}_{h\varphi(x)}^r f(x) \right|.$$

Man beachte, dass bei diesem Glattheitsmaß die Funktion f am Rand „weniger glatt“ sein darf als im Inneren des Intervalls. Z.B. gilt für $f(x) = (1 - x^2)^\gamma$ mit $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$

$$\omega(f, t) = \mathcal{O}(t^\gamma), \quad \omega_\varphi(f, t) = \mathcal{O}(t^{2\gamma}).$$

Die Verwendung des gewichteten Stetigkeitsmoduls führt zur Definition neuer Lipschitz-Klassen

$$\text{Lip}_\varphi(\alpha) = \{f \in C[-1, 1]; \omega_\varphi(f, t) = \mathcal{O}(t^\alpha)\},$$

die eine Erweiterung $\text{Lip}(\alpha) \subset \text{Lip}_\varphi(\alpha)$ der gewöhnlichen Lipschitz-Klassen darstellen.

Ebenso beachte man, dass ω_φ die „abstrakten“ Eigenschaften eines Stetigkeitsmoduls erfüllt, also $\omega_\varphi(f, \cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist stetig, monoton wachsend und erfüllt die Dreiecksungleichung

$$\omega_\varphi(f, t_1 + t_2) \leq \omega_\varphi(f, t_1) + \omega_\varphi(f, t_2).$$

Ditzian und Totik (s. DL, Kap. 6.6) zeigen

6.10 Lemma. Für $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C_r > 0$ so, dass für alle $f \in C^{r-1}[-1, 1]$ mit absolut-stetigem $f^{(r-1)}$ (d.h. $f^{(r)}$ existiert fast überall und ist integrierbar) die Ungleichung

$$\omega_{r,\varphi}(f, t) \leq C_r t^r \|\varphi^r f^{(r)}\|_\infty, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2r},$$

gilt.

Zur Bestapproximation mit algebraischen Polynomen gelangen nun die folgenden Aussagen, s. DL Kap. 8.7.

6.11 Satz (Ditzian, Totik, 1987). Für $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $M_r > 0$ so, dass für alle $f \in C[-1, 1]$

$$E_n(f) \leq M_r \omega_{r,\varphi} \left(f, \frac{1}{n} \right), \quad n \geq r,$$

gilt.

6.12 Folgerung (Ditzian, Totik, 1987). Für $f \in C[-1, 1]$ und $0 < \alpha < r$ gilt

$$E_n(f) = \mathcal{O}(n^{-\alpha}) \iff \omega_{r,\varphi}(f, t) = \mathcal{O}(t^\alpha), \quad n \geq r.$$

6.3 Aussagen zum Bernstein-Operator

Der Ditzian-Totik Stetigkeitsmodul zeigt seine „Klasse“ bei der Untersuchung des Bernstein-Operators

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) p_{n,k}(x), \quad f \in C[0, 1].$$

Hierbei sind $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ die Bernstein-Grundpolynome. Passend zum Intervall $[0, 1]$ wird die Gewichtsfunktion φ durch $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ ersetzt. Die Aussagen sind DL, Kap. 10.7 entnommen.

6.13 Satz (Totik 1991). Es existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1 \|f - B_n f\|_\infty \leq \omega_{2,\varphi} \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq c_2 \|f - B_n f\|_\infty.$$

Die erste Ungleichung ist die typische „direkte“ Aussage zum Approximationsfehler des linearen Operators B_n . Bemerkenswert ist die zweite Ungleichung, die eine **starke** Umkehraussage zum Approximationsfehler darstellt; denn hier wird ein (gewichteter) Stetigkeitsmodul zur Schrittweite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ nur mit dem Approximationsfehler des Operators B_n zum Polynomgrad n verglichen. Bei unseren bisherigen Umkehrsätzen war eine solche $1 \longleftrightarrow 1$ -Beziehung nicht möglich.

Hieran schließt sich die folgende Aussage zur Approximationsordnung nahtlos an.

6.14 Satz. Für $f \in C[0, 1]$ und $0 < \alpha < 2$ gilt:

$$\|f - B_n f\|_\infty = \mathcal{O}(n^{-\alpha/2}) \iff \omega_{2,\varphi}(f, t) = \mathcal{O}(t^\alpha) \iff E_n(f) = \mathcal{O}(n^{-\alpha}).$$

6.4 Markoff- und Bernstein-Ungleichungen

Für trigonometrische Polynome auf $\mathbb{T} \simeq [0, 1)$ wurden in Kapitel 7 die Bernstein-Ungleichung

$$\|\tilde{p}'\|_\infty \leq 2\pi n \|\tilde{p}\|_\infty, \quad \tilde{p} \in \mathcal{T}_n,$$

und die Ungleichung von Szegő

$$|\tilde{p}'(x)| \leq 2\pi n \sqrt{\|\tilde{p}\|_\infty^2 - (\tilde{p}(x))^2}, \quad \tilde{p} \in \mathcal{T}_n, \quad x \in \mathbb{T},$$

gezeigt. Für algebraische Polynome auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ gilt ein Analogon zur Bernstein-Ungleichung mit dem Faktor n^2 . Dass diese Konstante bestmöglich ist, zeigt schon das Tschebyscheff-Polynom T_n , denn mit $\xi = \frac{1}{2\pi} \arccos x$ ist

$$|T_n'(x)| = \frac{n |\sin(2\pi n \xi)|}{|\sin(2\pi \xi)|} \leq n^2, \quad T_n'(1) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{n \sin(2\pi n \xi)}{\sin(2\pi \xi)} = n^2.$$

6.15 Satz (Markoff-Ungleichung). *Für alle $p \in \mathcal{P}_n$ gilt*

$$(a) \quad \|p'\|_{\infty, [-1, 1]} \leq n^2 \|p\|_{\infty, [-1, 1]},$$

$$(b) \quad |p'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|p\|_{\infty, [-1, 1]} \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

Beweis. Teil (b) folgt direkt aus der Bernstein-Ungleichung für $\tilde{p}(\xi) = p(\cos \xi)$ (also $p(x) = \tilde{p}(\arccos x)$), denn mit $\xi = \arccos x$ ist

$$|p'(x)| = \frac{|\tilde{p}'(\xi)|}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|\tilde{p}\|_{\infty, \mathbb{T}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|p\|_{\infty, I}.$$

Teil (a) wird indirekt bewiesen.

Annahme: Es gibt $p \in \mathcal{P}_n$ mit $\|p\|_I < 1$ und $\|p'\|_I = p'(x^*) = n^2$. O.B.d.A. sei $x^* \geq 0$.

1. Zeige $x^* > \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) =$ größte Nullstelle des Tschebyscheff-Polynoms T_n .

Sonst wäre

$$\sqrt{1-(x^*)^2} \geq \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}$$

und Teil (b) würde liefern

$$n^2 = p'(x^*) \leq n^2 \|p\| < n^2, \quad \text{Widerspruch.}$$

2. Zeige $|p(x^*)| < T_n(x^*) = \cos(2\pi n \xi^*)$ mit $\xi^* = \frac{1}{2\pi} \arccos(x^*)$.

Für $x^* = 1$ folgt dies aus $\|p\| < 1 = T_n(1)$. Also braucht nur der Fall $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) < x^* < 1$ (also $0 < \xi^* < \frac{1}{4n}$) betrachtet werden.

Wäre $|p(x^*)| \geq T_n(x^*)$, so würde mit $\tilde{p}(\xi) = p(\cos(2\pi\xi))$ und

$$\|\tilde{p}\| < 1, \quad |\tilde{p}(\xi^*)| = |p(x^*)| \geq T_n(x^*) = \cos(2\pi n\xi^*)$$

aus der Ungleichung von Szegö folgen

$$\begin{aligned} n^2 |\sin(2\pi\xi^*)| &= |p'(x^*) \sin(2\pi\xi^*)| = \frac{1}{2\pi} |\tilde{p}'(\xi^*)| \\ &\leq n \sqrt{\|\tilde{p}\|_\infty^2 - (\tilde{p}(\xi^*))^2} \\ &< n \sqrt{1 - \cos^2(2\pi n\xi^*)} \\ &= n |\sin(2\pi n\xi^*)| \leq n^2 |\sin(2\pi\xi^*)|, \quad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

3. Wir leiten nun den Widerspruch zu den Annahmen über p her. Setze $q := T_n - p \in \mathcal{P}_n$, $q \neq 0$ (wegen $\|p\| < 1$). An den **Extremalstellen** $y_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ von T_n (beachte $y_0 = 1 > y_1 > \dots > y_n = -1$) gilt

$$\text{sign } T_n(y_k) = \text{sign } q(y_k) = (-1)^k.$$

Also hat q genau n Nullstellen $x_k \in (y_{k+1}, y_k)$, $0 \leq k \leq n-1$.

Nach dem Satz von Rolle hat q' jeweils eine Nullstelle $\xi_k \in (x_{k+1}, x_k)$, $0 \leq k \leq n-2$. Weitere Nullstellen von q oder q' gibt es nicht (Fundamentalsatz der Algebra); insbesondere folgt aus $q(1) > 0$ sofort $q(x) > 0$ für alle $x > x_0$ und $q'(x) > 0$ für alle $x > \xi_0$.

Wir haben in 1. und 2. gezeigt, dass

$$1 \stackrel{1.}{=} \text{sign } T_n(x^*) \stackrel{2.}{=} \text{sign } q(x^*) \quad \text{und} \quad x^* > y_1$$

gilt, also ist $1 \geq x^* > x_0 > \xi_0$. Damit gilt $q'(x^*) > 0$. Andererseits folgt aus $\|T_n'\| \leq n^2 q'(x^*) = T_n'(x^*) - n^2 \leq 0$, also ein Widerspruch. \square

Für die Aussagen zum **gewichteten** Stetigkeitsmodul passt die folgende Bernstein-Ungleichung:

Bei Verwendung der Gewichtsfunktion $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ in der Bestimmung der Maximumnorm auf $[-1, 1]$ erhält man, wie bei trigonometrischen Polynomen, die Konstante n (an Stelle von n^2 in der Markoff-Ungleichung). Die Aussage wird sofort für höhere Ableitungen formuliert.

6.16 Satz (Bernstein-Ungleichung). *Es sei $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ für $x \in I = [-1, 1]$. Für $r \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C_r > 0$ so, dass für alle $n \geq r$ und $p \in \mathcal{P}_n$ gilt*

$$\|\varphi^r p^{(r)}\|_{\infty, [-1, 1]} \leq C_r n^r \|p\|_{\infty, [-1, 1]}.$$

7 Charakterisierung der Bestapproximation in $L^p(D)$ und $C(D)$

Im Hilbertraum $L^2(D)$ wird das Problem der Bestapproximation durch die Orthogonalprojektion gelöst: falls $M \subseteq L^2(D)$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(D)$ ist, so ist die metrische Projektion

$$\Pi_M : L^2(D) \longrightarrow M, \quad f \longmapsto \Pi_M(f),$$

eindeutig charakterisiert durch die Orthogonalitätsrelation

$$\int_D (f(x) - \Pi_M(f)(x)) \overline{v(x)} dx = 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Wir entwickeln nun ähnliche Charakterisierungen für die Bestapproximation in weiteren Banachräumen.

Ein allgemeines Kriterium lässt sich mit Hilfe des Dualraums (siehe Funktionalanalysis I) aufstellen. Sei hierzu $(X, \|\cdot\|_X)$ ein (reeller oder komplexer) normierter Raum. Der Skalar Körper wird mit \mathbb{K} bezeichnet (also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Der **algebraische Dualraum** von X ist die Menge aller linearen Funktionale

$$\{\lambda : X \longrightarrow \mathbb{K} : \lambda \text{ linear}\}.$$

Das lineare Funktional λ ist genau dann stetig, wenn seine **Operatornorm**

$$\|\lambda\|_{X'} := \sup\{|\lambda(f)| : f \in X \text{ mit } \|f\|_X = 1\}$$

endlich ist. Die Menge aller stetigen linearen Funktionale bildet den (topologischen) **Dualraum**

$$X' = \{\lambda : X \longrightarrow \mathbb{K} : \lambda \text{ linear, } \|\lambda\|_{X'} < \infty\}.$$

In der Funktionalanalysis wird gezeigt, dass $(X', \|\cdot\|_{X'})$ ein vollständiger normierter Raum, also ein Banachraum ist.

7.1 Beispiel. (a) H sei ein Hilbertraum. Der **Riesz'sche Darstellungssatz** besagt, dass zu jedem stetigen Funktional $\lambda : H \longrightarrow \mathbb{K}$ ein eindeutig bestimmtes Element $v_\lambda \in H$ existiert, so dass

$$\lambda(f) = \langle f, v_\lambda \rangle \quad \text{für alle } f \in H \tag{7.1}$$

gilt. Weiterhin gilt $\|\lambda\|_{H'} = \|v_\lambda\|_H$. Also ist der Dualraum H' isometrisch isomorph zu H : alle linearen stetigen Funktionale auf H haben die Form (7.1).

- (b) **Dualraum von $L^p(D)$ für $1 < p < \infty$:** Zu einer messbaren Menge D wird wie üblich der Banachraum

$$L^p(D) = \left\{ f : D \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ messbar, } \|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

definiert (Achtung: Funktionen werden identifiziert, wenn sie fast überall übereinstimmen). Wir setzen $q = \frac{p}{p-1} \in (1, \infty)$. Dann definiert jede Funktion $h \in L^q(D)$ ein **stetiges** lineares Funktional

$$\lambda_h : L^p(D) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda_h(f) = \int_D f(x) \overline{h(x)} dx. \quad (7.2)$$

Die Stetigkeit (=Beschränktheit) folgt aus der Hölderungleichung

$$|\lambda_h(f)| \leq \|f\|_p \|h\|_q,$$

und man zeigt genauer, dass $\|\lambda_h\| = \|h\|_q$ die Operatornorm des Funktionals λ_h ist. Es gilt weiterhin, dass hierdurch sämtliche linearen stetigen Funktionale auf $L^p(D)$ erfasst sind, d.h.

$$(L^p(D))' = L^q(D), \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

- (c) **Dualraum von $L^1(D)$:** Der Banachraum

$$L^1(D) = \left\{ f : D \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ messbar, } \|f\|_1 = \int_D |f(x)| dx < \infty \right\}$$

ist der Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Sein Dualraum ist

$$L^\infty(D) = \left\{ f : D \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ messbar, } \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)| < \infty \right\}.$$

Das hierbei verwendete „wesentliche Supremum“ (geschrieben *ess sup*) ist das Supremum aller Werte $|f(x)|$ ohne Berücksichtigung von (Lebesgue-)Nullmengen. Beispiele von L^∞ -Funktionen sind beschränkte Treppenfunktionen.

- (d) **Dualraum von $C(K)$:** Zur kompakten (nichtleeren) Menge K ist $C(K)$ der Banachraum der stetigen Funktionen mit der Maximumsnorm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Sein Dualraum ist der Banachraum $\mathcal{M}(K)$ der (regulären) komplexen oder reellen Borelmaße auf K .

Zu diesem Begriff: Ein Borel-Maß μ ordnet jeder Menge M der Borel- σ -Algebra von K einen komplexen oder reellen Wert zu, man schreibt

$$\mu(M) = \int_M d\mu.$$

Das Maß heißt regulär, wenn sein Absolutbetrag $|\mu|$ die Beziehung

$$|\mu|(M) = \inf\{|\mu|(O); O \supset M, O \text{ offen}\} = \sup\{|\mu|(L) : L \subseteq M, L \text{ kompakt}\}$$

erfüllt, also „von außen“ und „von innen“ regulär ist. Durch

$$\|\mu\| := |\mu|(K)$$

wird eine Norm definiert, mit der $\mathcal{M}(K)$ ein Banachraum ist.

Durch ein reguläres Borel-Maß μ ist das lineare Funktional

$$\lambda : C(K) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda_\mu(f) = \int_K f d\mu,$$

definiert. Seine Operatornorm ist $\|\mu\| = \int_K d|\mu|$. Die obige Aussage besagt, dass hiermit sämtliche Elemente des Dualraums $(C(K))'$ vorliegen.

Spezialfall: Bei uns treten reguläre Borel-Maße der Form

$$\mu(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k), \quad f \in C(K),$$

zu paarweise verschiedenen Punkten $x_1, \dots, x_n \in K$ auf. Hierbei sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ reelle oder komplexe Zahlen. Man berechnet leicht

$$\|\mu\| = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|,$$

indem man eine Funktion $f \in C(K)$ mit $f(x_k) = \frac{\overline{\alpha_k}}{|\alpha_k|}$ konstruiert (z.B. wie im Satz von Tietze aus der Topologie).

Nach diesen Vorüberlegungen aus der Funktionalanalysis kommen wir zum eigentlichen Anliegen, der Charakterisierung eines Proximums. Hierbei spielt weder die Eindeutigkeit noch die globale Existenz von Proxima eine Rolle.

7.2 Satz. *Ein normierter Raum X , ein abgeschlossener Teilraum $M \subseteq X$ sowie $f \in X \setminus M$ seien gegeben.*

Ein Element $v^ \in M$ ist genau dann Proximum an f , wenn es ein lineares stetiges Funktional $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{K}$ gibt mit*

$$(i) \quad \|\lambda\|_{X'} = 1,$$

(ii) $\lambda(v) = 0$ für alle $v \in M$, d.h. λ ist „orthogonal“ zu M ,

(iii) $\lambda(f) = \lambda(f - v^*) = \|f - v^*\|_X$.

Beweis. 1. Die Bedingungen (i)–(iii) sind hinreichend: Für alle $v \in M$ gilt

$$\|f - v^*\| \stackrel{(iii)}{=} \lambda(f) \stackrel{(ii)}{=} \lambda(f - v) \stackrel{(i)}{\leq} \|f - v\|,$$

also ist

$$\|f - v^*\| = \inf_{v \in M} \|f - v\| = E_M(f).$$

2. Die Bedingungen (i)–(iii) sind notwendig: Das Element $v^* \in M$ sei Proximum zu $f \in X \setminus M$. Wir definieren den Teilraum

$$M_f = M \oplus \text{span}\{f\} = \{v + \alpha f : v \in M, \alpha \in \mathbb{K}\} \subseteq X.$$

Durch die Festlegung

$$\tilde{\lambda}(f) = \|f - v^*\|, \quad \tilde{\lambda}(v) = 0 \quad \text{für } v \in M,$$

wird ein lineares Funktional $\tilde{\lambda} : M_0 \rightarrow \mathbb{K}$ definiert. Um seine Norm zu bestimmen, berechnen wir für beliebiges $v + \alpha f \in M_0$

$$|\tilde{\lambda}(v + \alpha f)| = |\tilde{\lambda}(\alpha f)| = |\alpha| \|f - v^*\| = |\alpha| E_M(f).$$

Die elementare Eigenschaft $E_M(\alpha f) = |\alpha| E_M(f)$ des Approximationsgrades ergibt

$$|\tilde{\lambda}(v + \alpha f)| = E_M(\alpha f) \leq \|\alpha f - (-v)\| = \|v + \alpha f\|.$$

Also ist $\|\tilde{\lambda}\| \leq 1$. Zusammen mit $\tilde{\lambda}(f - v^*) = \tilde{\lambda}(f) = \|f - v^*\|$ folgt $\|\tilde{\lambda}\| = 1$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach (Funktionalanalysis I) existiert ein stetiges lineares Funktional $\lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\|\lambda\| = \|\tilde{\lambda}\| = 1$ und $\lambda(g) = \tilde{\lambda}(g)$ für alle $g \in M_0$. Dieses Funktional erfüllt (i)–(iii). \square

Im ersten Beweisteil wird eine Form der „Orthogonalität“ $\lambda \perp M$ ausgenutzt, die für Elemente $\lambda \in X'$ des Dualraums in Analogie zur Orthogonalität in Hilberträumen definiert wird. Diese Orthogonalität allein (also ohne die Eigenschaft (iii)) liefert eine untere Abschätzung des Approximationsgrades.

Folgerung: Es sei $\lambda \in X'$ mit $\|\lambda\| = 1$ und $\lambda(v) = 0$ für alle $v \in M$ gegeben. Dann gilt für alle $f \in X$ die Beziehung

$$E_M(f) \geq |\lambda(f)|.$$

Beweis. $E_M(f) = \inf_{v \in M} \|f - v\| = \inf_{v \in M} \|\lambda\| \|f - v\| \geq \inf_{v \in M} |\lambda(f - v)| = |\lambda(f)|$. \square

In Abschnitt 7.1 behandeln wir die Charakterisierung der Bestapproximation im Raum $L^p(D)$, in Abschnitt 7.2 folgen entsprechende Aussagen für $C(K)$. Wir betrachten jeweils nur den Fall reeller Funktionen, setzen also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

7.1 Charakterisierung der Bestapproximation in $L^p(D)$

Zunächst wird der Fall der strikt konvexen Räume $L^p(D)$ mit $1 < p < \infty$ behandelt.

7.3 Satz. *Es sei $1 < p < \infty$, $M \subseteq L^p(D)$ ein abgeschlossener Teilraum und $f \in L^p(D) \setminus M$. Das Element $v^* \in M$ ist genau dann Proximum an f , wenn*

$$\int_D |f(x) - v^*(x)|^{p-1} \operatorname{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx = 0 \quad (7.3)$$

für alle $v \in M$ gilt.

Beweis. 1. Zur Existenz des Integrals: Wir setzen $q = \frac{p}{p-1}$. Für beliebige $f, v^* \in L^p(D)$ ist die Funktion

$$h := |f - v^*|^{p-1} \operatorname{sign}(f - v^*)$$

ein Element von $L^q(D)$, denn

$$\|h\|_q = \left(\int_D |f - v^*|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_D |f - v^*|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f - v^*\|_p^{p-1}.$$

2. Die Bedingung (7.3) ist hinreichend: Das lineare Funktional

$$\lambda : L^p(D) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda(g) = \frac{1}{\|f - v^*\|_p^{p-1}} \int_D h(x)g(x) dx$$

ist stetig. Seine Norm ist

$$\|\lambda\| = \frac{1}{\|f - v^*\|_p^{p-1}} \|h\|_q = 1$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \lambda(f - v^*) &= \frac{1}{\|f - v^*\|_p^{p-1}} \int_D h(x)(f(x) - v^*(x)) dx \\ &= \frac{1}{\|f - v^*\|_p^{p-1}} \int_D |f(x) - v^*(x)|^p dx = \|f - v^*\|_p. \end{aligned}$$

Also erfüllt λ die Eigenschaften (i) und (iii) aus Satz 7.2. Falls zusätzlich die Bedingung (7.3) gilt, ist auch (ii) in Satz 7.2 erfüllt, und damit ist v^* ein Proximum an f .

3. Die Bedingung (7.3) ist notwendig: Wir verwenden ein Argument der Variationsrechnung.

Es sei v^* ein Proximum an f und $v \in M$ sei beliebig vorgegeben. Die reelle Funktion

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k(\varepsilon) = \|f - v^* + \varepsilon v\|_p^p = \int_D |f(x) - v^*(x) + \varepsilon v(x)|^p dx$$

hat bei $\varepsilon = 0$ ihr absolutes Minimum. Da k stetig und differenzierbar ist (s. Analysis 2: Parameterintegrale), muss $k'(0) = 0$ gelten. Einfache Rechnung ergibt

$$k'(\varepsilon) = p \int_D |f(x) - v^*(x) + \varepsilon v(x)|^{p-1} \operatorname{sign}(f(x) - v^*(x) + \varepsilon v(x)) v(x) dx,$$

und durch Einsetzen von $\varepsilon = 0$ folgt die Identität (7.3). □

7.4 Bemerkung. Die Bedingung (7.3) wird in Anlehnung an den Fall $p = 2$ ebenfalls als **Orthogonalitätsrelation** bezeichnet.

Würde man die Orthogonalitätsrelation aus Satz 7.2 auf den Fall $p = 1$ erweitern, so würde sich

$$\int_D \operatorname{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v \in M \subseteq L^1(D) \quad (7.4)$$

ergeben. Diese Bedingung ist allerdings zu stark, wie das folgende Beispiel zeigt.

7.5 Beispiel. Die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & , \text{ für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

liegt in $L^p(0, 1)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$. Wir betrachten die Bestapproximation durch konstante Funktionen, also $M = \mathcal{P}_0$.

- (a) Für jeden Wert $1 < p < \infty$ besitzt f ein eindeutiges Proximum, nämlich die konstante Funktion $v^*(x) \equiv \frac{1}{2}$. Den Nachweis kann man direkt (s. Übung) oder mit der Orthogonalitätsrelation (7.3) führen: für jede konstante Funktion $v \equiv a$ ist

$$\int_0^1 |f(x) - v^*(x)|^{p-1} \operatorname{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx = a \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \right) = 0.$$

- (b) Für $p = 1$ ist jede konstante Funktion $v^*(x) \equiv c$ mit $c \in [0, 1]$ Proximum an f (s. Übung). Für $v^* \equiv c$ mit $0 < c < 1$ gilt tatsächlich die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^1 \operatorname{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx = a \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \right) = 0.$$

Allerdings erhalten wir für das Proximum $v^* \equiv 0$

$$\int_0^1 \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx = a \int_0^{\frac{1}{2}} dx \neq 0,$$

sofern $v \in \mathcal{P}_0 \setminus \{0\}$ gewählt wird.

Wir zeigen nun, dass eine abgeschwächte Relation die Proxima in $L^1(D)$ charakterisiert. Eine besondere Rolle spielt dabei die Menge

$$A_0 = A_0(f - v^*) = \{x \in D : f(x) - v^*(x) = 0\} \quad (7.5)$$

der Nullstellen von $f - v^*$. (Genau genommen ist diese Menge nur bis auf eine Lebesgue-Nullmenge bestimmt, da ja die einzelne Punktauswertung einer L^1 -Funktion gar nicht zulässig ist.) Wir sehen im obigen Beispiel bereits, dass die strenge Orthogonalitätsrelation (7.4) verletzt werden kann, wenn A_0 ein positives Maß hat.

7.6 Satz. *Es sei $M \subseteq L^1(D)$ ein abgeschlossener Teilraum und $f \in L^1(D) \setminus M$. Das Element $v^* \in M$ ist genau dann Proximum an f , wenn mit der Menge $A_0 = A_0(f - v^*)$ in (7.5)*

$$\left| \int_{D \setminus A_0} \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx \right| \leq \int_{A_0} |v(x)| dx \quad (7.6)$$

für alle $v \in M$ gilt.

Beweis. 1. Die Bedingung (7.6) ist hinreichend: Für alle $v \in M$ gilt

$$\|f - v^* + v\|_1 = \int_{D \setminus A_0} |f(x) - v^*(x) + v(x)| dx + \int_{A_0} |v(x)| dx.$$

Im ersten Integral verwenden wir die reelle Ungleichung

$$|a + b| \geq |a| + \text{sign}(a) b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

und erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} \|f - v^* + v\|_1 &\geq \int_{D \setminus A_0} |f(x) - v^*(x)| dx + \int_{D \setminus A_0} \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx \\ &\quad + \int_{A_0} |v(x)| dx \\ &= \|f - v^*\|_1 + \int_{D \setminus A_0} \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx + \int_{A_0} |v(x)| dx \\ &\stackrel{(7.6)}{\geq} \|f - v^*\|_1. \end{aligned}$$

Also ist v^* Proximum an f .

2. Die Bedingung (7.6) ist notwendig: Weil $L^\infty(D)$ der Dualraum von $L^1(D)$ ist, existiert nach Satz 5.1 eine Funktion $h \in L^\infty(D)$ mit

- (i) $\|h\|_\infty = 1$,
- (ii) $\int_D h(x)v(x) dx = 0$ für alle $v \in M$, und
- (iii) $\int_D h(x)(f(x) - v^*(x)) dx = \|f - v^*\|_1$.

Die letzte Identität ist äquivalent zu

$$\int_{D \setminus A_0} h(x)(f(x) - v^*(x)) dx = \int_{D \setminus A_0} |f(x) - v^*(x)| dx.$$

Wegen $\|h\|_\infty = 1$ folgt hieraus sofort

$$h(x) = \text{sign}(f(x) - v^*(x)) \quad \text{für fast alle } x \in A_0.$$

(Das „fast alle“ lässt Nullmengen zu, in denen h andere Werte annimmt. Diese spielen für die Integration keine Rolle.) Weiter folgt mit (i) und (ii)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{A_0} h(x)v(x) dx + \int_{D \setminus A_0} \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx \\ &\begin{cases} \leq + \int_{A_0} |v(x)| dx + \int_{D \setminus A_0} \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx \\ \geq - \int_{A_0} |v(x)| dx + \int_{D \setminus A_0} \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx. \end{cases} \end{aligned}$$

Umstellung der so erhaltenen Ungleichungen ergibt

$$- \int_{A_0} |v(x)| dx \leq \int_{D \setminus A_0} \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) dx \leq \int_{A_0} |v(x)| dx.$$

Dies ist genau die Beziehung (7.6). □

7.2 Charakterisierung der Bestapproximation in $C(K)$

Die Menge K sei kompakt. Wir behandeln nun die Bestapproximation im Banachraum $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ der stetigen und reellwertigen Funktionen. Wie bereits erwähnt ist der Dualraum gegeben durch den Raum der regulären reellen Borel-Maße auf K .

Für zwei Elemente f und v^* definieren wir die Menge

$$A_\infty = A_\infty(f - v^*) = \{x \in K : |f(x) - v^*(x)| = \|f - v^*\|_\infty\} \quad (7.7)$$

aller **Extremalpunkte** von $f - v^*$; dies sind alle Punkte, an denen $|f - v^*|$ sein absolutes Maximum annimmt. (Skizze!)

Wir teilen die Charakterisierung auf in zwei Teile. Die erste Aussage gilt für beliebige abgeschlossene Teilräume von $C(K)$, die zweite gilt nur im endlich-dimensionalen Fall.

7.7 Satz. K sei kompakt, $M \subseteq C(K)$ sei ein abgeschlossener Teilraum und $f \in C(K) \setminus M$ sei gegeben. Für ein Element $v^* \in M$ sind äquivalent:

(a) v^* ist Proximum an f .

(b) Es existiert ein reguläres reelles Borel-Maß μ mit

$$(i) \quad \|\mu\| = 1, \quad (ii) \quad \int_K v \, d\mu = 0 \quad \text{für alle } v \in M, \quad (iii) \quad \int_K f \, d\mu = \|f - v^*\|_\infty.$$

(c) Kolmogorov-Kriterium (1948): Für alle $v \in M$ gilt

$$\max_{x \in A_\infty(f-v^*)} (f(x) - v^*(x)) v(x) \geq 0.$$

7.8 Bemerkung. Das Kolmogorov-Kriterium kann auch in den Formen

$$\max_{x \in A_\infty(f-v^*)} \text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) \geq 0$$

oder

$$\max_{x \in A_\infty(f-v^*)} \text{sign}[(f(x) - v^*(x)) v(x)] \geq 0$$

angegeben werden. Dabei ist $\text{sign}(a) = 0$ für $a = 0$ zu setzen. Man beachte auch die Beziehung

$$f(x) - v^*(x) = \sigma(x) \|f - v^*\|_\infty \quad \text{für alle } x \in A_\infty(f - v^*),$$

wobei $\sigma(x) \in \{-1, 1\}$ geeignet zu wählen ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b) ist eine Wiederholung der Aussage von Satz 7.2 für den Fall $X = C(K)$. Wir zeigen nun, dass (a) äquivalent ist zu (c).

1. Sei v^* ein Proximum an $f \in C(K) \setminus M$. Weil M abgeschlossen ist, gilt $E := E_M(f) > 0$. Die Extremalmenge $A_\infty(f - v^*) = (f - v^*)^{-1}(\{-E, E\}) \subseteq K$ ist abgeschlossen (als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{-E, E\}$), also ebenfalls kompakt. Wir führen nun die folgende Annahme zum Widerspruch: **Es existiert ein $v \in M$ mit**

$$\max_{x \in A_\infty(f-v^*)} (f(x) - v^*(x)) v(x) < 0. \tag{7.8}$$

Als Widerspruch weisen wir nach, dass dann $\|f - v^* + \lambda v\|_\infty < E_M(f)$ für hinreichend kleines $\lambda > 0$ gilt. Dazu wählen wir $\varepsilon > 0$ mit

$$\max_{x \in A_\infty(f-v^*)} (f(x) - v^*(x)) v(x) < -2\varepsilon$$

sowie eine offene Menge $U \supset A_\infty(f - v^*)$ mit

$$\max_{x \in U} (f(x) - v^*(x))v(x) < -\varepsilon.$$

Setzen wir $C := \|v\|_\infty$, so ist $C > 0$ wegen (7.8). Für alle $0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{C^2}$ und alle $x \in U$ folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - v^*(x) + \lambda v(x)|^2 &= |f(x) - v^*(x)|^2 + 2\lambda \underbrace{(f(x) - v^*(x))v(x)}_{< -\varepsilon} + \lambda^2 |v(x)|^2 \\ &< E^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2 C^2 < E^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda\varepsilon < E^2. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $K \setminus U$ kompakt und disjunkt zur Extremalmenge $A_\infty(f - v^*)$. Also existiert $\delta > 0$ mit

$$\max_{x \in K \setminus U} |f(x) - v^*(x)| \leq E - \delta.$$

Für alle $0 < \lambda < \frac{\delta}{2C}$ und alle $x \in K \setminus U$ folgt

$$|f(x) - v^*(x) + \lambda v(x)| \leq |f(x) - v^*(x)| + \lambda |v(x)| < E - \delta + \frac{\delta}{2} < E.$$

Damit wäre $v^* - \lambda v$ eine bessere Approximation an f , ein Widerspruch.

2. Nun sei $v^* \in M$ so gegeben, dass die Kolmogorov-Bedingung (c) erfüllt ist. Zu beliebigem $v \in M$ wählen wir einen Punkt $x_0 \in A_\infty(f - v^*)$ so, dass

$$(f(x_0) - v^*(x_0))v(x_0) \geq 0$$

gilt. Dann erhalten wir (ähnlich wie in 1.)

$$|f(x_0) - v^*(x_0) + v(x_0)|^2 = \underbrace{|f(x_0) - v^*(x_0)|^2}_{= E^2} + 2 \underbrace{(f(x_0) - v^*(x_0))v(x_0)}_{\geq 0} + |v(x_0)|^2 \geq E^2.$$

Also ist v^* Proximum an f . □

Das Kolmogorov-Kriterium hat eine schöne geometrische Interpretation für einen endlich-dimensionalen Teilraum $M \subseteq C(K)$. Im Fall $\dim(M) = n$ ordnet man der Extremalmenge $A_\infty(f - v^*)$ eine gewisse Punktmenge $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ zu und geht dann zur **konvexen Hülle** dieser Punktmenge über.

7.9 Definition. Die **konvexe Hülle** einer nichtleeren Menge $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$\text{conv}(Z) = \left\{ y = \sum_{k=1}^r p_k z_k; \ r \in \mathbb{N}, \ z_1, \dots, z_r \in Z, \ p_1, \dots, p_r \in [0, 1] \ \text{und} \ \sum_{k=1}^r p_k = 1 \right\}. \quad (7.9)$$

Mit anderen Worten: Y ist die Menge aller **Konvexkombinationen** von Elementen aus Z . Dies ist gleichzeitig die kleinste konvexe Menge, die Z enthält.

Eine Aussage zur Anzahl der Summanden in (7.9) gibt der wichtige Satz von Carathéodory.

7.10 Satz (Carathéodory). *In Definition 7.9 darf $r \leq n+1$ verlangt werden; d.h. für jeden Punkt $y \in \text{conv}(Z)$ existieren $r \leq n+1$ Punkte $z_1, \dots, z_r \in Z$ und Zahlen $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^r p_k = 1$ sowie*

$$y = \sum_{k=1}^r p_k z_k.$$

Auf diesem Hintergrund liefert der folgende Satz eine geometrische Charakterisierung der Bestapproximation in $C(K)$.

7.11 Satz (Rivlin-Shapiro). *K sei kompakt, $M \subseteq C(K)$ sei ein endlich-dimensionaler Teilraum und $f \in C(K) \setminus M$ sei gegeben. Weiter sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ eine Basis von M , $\dim(M) = n$. Für $v^* \in M$ sind äquivalent:*

(a) v^* ist Proximum an f .

(d) *Es existieren $r \leq n+1$ paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_r \in A_\infty(f - v^*)$ und Zahlen $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^r p_k = 1$, so dass*

$$\sum_{k=1}^r p_k \text{sign}(f(x_k) - v^*(x_k)) v(x_k) = 0$$

für alle $v \in M$ gilt.

(e) Für $x \in A_\infty(f - v^*)$ definieren wir den Punkt

$$\vec{z}(x) = \text{sign}(f(x) - v^*(x)) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Die konvexe Hülle der Menge

$$Z = \{\vec{z}(x); x \in A_\infty(f - v^*)\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

enthält den Nullpunkt.

7.12 Bemerkung. Mit Teil (d) lässt sich für den Fall $\dim(M) = n$ das lineare Funktional λ in Satz 7.2 beschreiben. Setzen wir $\sigma_k = \text{sign}(f(x_k) - v^*(x_k)) \in \{-1, 1\}$ für $1 \leq k \leq r$, so definiert

$$\lambda(g) = \sum_{k=1}^r p_k \sigma_k g(x_k)$$

ein reguläres Borel-Maß mit den Eigenschaften

$$(i) \quad \|\lambda\| = \sum_{k=1}^r |p_k \sigma_k| = \sum_{k=1}^r p_k = 1,$$

$$(ii) \quad \lambda(v) = 0 \quad \text{für alle } v \in M,$$

$$(iii) \quad \lambda(f) = \lambda(f - v^*) = \sum_{k=1}^r p_k \sigma_k(f(x_k) - v^*(x_k)) = \sum_{k=1}^r p_k \underbrace{|f(x_k) - v^*(x_k)|}_{= \|f - v^*\|_\infty} = \|f - v^*\|_\infty.$$

Beweis. Wir führen einen Ringschluss (e) \implies (d) \implies (a) \implies (e) durch, bei dem die Aussage (a) durch Aussage (b) in Satz 7.7 ersetzt wird.

Falls 0 ein Element der konvexen Hülle von Z ist, so ist 0 bereits eine Konvexkombination von $r \leq n + 1$ Punkten aus Z (Carathéodory). Die zugehörigen Elemente aus $A_\infty(f - v^*)$ seien mit x_1, \dots, x_r und die Faktoren der Konvexkombination mit p_1, \dots, p_r bezeichnet. Lesen wir die Vektorgleichung

$$0 = \sum_{k=1}^r p_k z(x_k)$$

zeilenweise, so erhalten wir

$$0 = \sum_{k=1}^r p_k \operatorname{sign}(f(x_k) - v^*(x_k)) \varphi_i(x_k), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dies ist äquivalent zu

$$0 = \sum_{k=1}^r p_k \operatorname{sign}(f(x_k) - v^*(x_k)) v(x_k), \quad v \in M, \quad (7.10)$$

also folgt die Aussage (d) aus (e).

Weiterhin impliziert (7.10), dass für beliebiges $v \in M$ und mindestens ein k die Relation

$$\operatorname{sign}(f(x_k) - v^*(x_k)) v(x_k) \geq 0$$

gilt. Daher folgt die Aussage (b) in Satz 7.7 aus (d).

Schließlich ist zu zeigen, dass (b) in Satz 7.7 auch (e) impliziert. Dies führen wir anhand eines Widerspruchsbeweises durch. Sei v^* Proximum an f . Falls 0 kein Element der konvexen Hülle der Menge Z ist, gibt es eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $H \cap Z = \emptyset$; d.h. es existiert $c = (c_1, \dots, c_n) \neq 0$ mit

$$\langle c, z \rangle < 0 \quad \text{für alle } z \in Z.$$

Für alle $x \in A_\infty(f - v^*)$ ist also

$$\langle c, z(x) \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \operatorname{sign}(f(x) - v^*(x)) \varphi_i(x) < 0.$$

Schreiben wir dies mit Hilfe der Linearkombination $v = \sum_i c_i \varphi_i \in M$, so lautet dies

$$\text{sign}(f(x) - v^*(x)) v(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in A_\infty(f - v^*),$$

ein Widerspruch zu (b) in Satz 7.7. □

Die Charakterisierung des Proximums in $M \subseteq C(K)$ mit Hilfe der Punktauswertung in Stellen der Extremalmenge $A_\infty(f - v^*)$ wird eine wichtige Rolle bei der numerischen Berechnung des Proximums spielen, die wir in Kapitel ?? (Remez-Algorithmus) behandeln werden.

Zusammenfassung: Wir haben in Satz 7.3 eine abstrakte Charakterisierung von Proxima in normierten Räumen kennengelernt. Diese ließ sich für die Funktionenräume $L^p(D)$, $1 \leq p < \infty$, und $C(K)$ nochmals präzisieren.

7.3 Bestapproximation mit Haarschen Räumen ---

Wir setzen die Untersuchungen von Abschnitt 7.2 zur Bestapproximation in Teilräumen von $C(K)$, K kompakt, fort. Dabei betrachten wir den Fall reellwertiger Funktionen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) und endlich-dimensionaler Teilräume

$$M = \text{span} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \}, \quad \dim(M) = n \in \mathbb{N}.$$

Die Funktionen $\varphi_i : K \rightarrow \mathbb{R}$ bilden eine Basis von M .

Die Existenz von Proxima zu beliebigem $f \in C(K)$ wurde bereits in Kapitel 3 (Existenzsatz) geklärt. Die Eindeutigkeit des Proximums ist jedoch nicht immer gegeben, die Maximumsnorm ist ja nicht strikt konvex. Wir betrachten im ersten Teilabschnitt Beispiele Haarscher Räume und beweisen den Satz von Haar (Satz 7.19), dass $M \subseteq C(K)$ **genau dann** eine Eindeutigkeitsmenge ist, wenn M ein Haarscher Raum ist. Der zweite Teilabschnitt ist eher von technischer Natur. Er dient dem Beweis des Satzes von Krein (Satz 7.21), dass jeder Haarsche Raum eine strikt positive (also nullstellen-freie) Funktion enthält. Dies geht dann im letzten Teilabschnitt in den Beweis des Alternantensatzes von Chebyshev ein (Satz 7.30).

7.3.1 Haarsche Räume und der Eindeutigkeitsatz von Haar

In der Numerik I lernt man bereits den folgenden wichtigen Begriff kennen.

7.13 Definition. K sei kompakt.

- (a) Ein n -dimensionaler Teilraum $M \subseteq C(K)$ heißt **Haar-Raum** (oder **Haarscher Raum**), wenn jedes $v \in M \setminus \{0\}$ höchstens $n - 1$ Nullstellen besitzt.

(b) *Linear unabhängige Funktionen* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(K)$ heißen **Chebyshev-System** oder **Haarsches System**, wenn der Raum $M = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Haar-Raum ist.

Nach der obigen Sprechweise ist jede Basis eines Haarschen Raums also ein Chebyshev-System.

7.14 Beispiel. (i) Es sei $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Der Raum

$$\mathcal{P}_n = \text{span}\{e_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; e_k(x) = x^k, 0 \leq k \leq n\}$$

ist ein Haar-Raum der Dimension $n + 1$, die Monome e_k , $0 \leq k \leq n$, bilden also ein Chebyshev-System. Dies ist im **Fundamentalsatz der Algebra** begründet: Jedes von 0 verschiedene Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen (unter Berücksichtigung der Vielfachheit). Als Konsequenz kann $p \neq 0$ höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen im Intervall $[a, b]$ besitzen.

(ii) Es sei $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zu n paarweise verschiedenen Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, definieren wir den Raum

$$M_n = \text{span}\{e^{a_i} : 1 \leq i \leq n\}$$

von Exponentialsummen. Dieser Raum ist ein Haar-Raum der Dimension n : Der Beweis erfolgt per Induktion nach n . Für $n = 1$ hat $v(x) = ce^{ax}$ mit $c \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, keine Nullstelle, also ist

$$M_1 = \text{span}\{e^{a_1}\}$$

ein Haar-Raum der Dimension 1. Sind nun $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, so betrachten wir eine Linearkombination

$$v = \sum_{i=1}^n c_i e^{a_i}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad (c_1, \dots, c_n) \neq 0.$$

O.B.d.A. sei $c_n \neq 0$. Die hieraus gebildete Funktion

$$g := (e^{-a_1} v)' = \left(c_1 + \sum_{i=2}^n c_i e^{(a_i - a_1)} \right)' = \sum_{i=2}^n c_i (a_i - a_1) e^{(a_i - a_1)}.$$

liegt im Haar-Raum $\text{span}\{e^{(a_i - a_1)} : 2 \leq i \leq n\}$ der Dimension $n - 1$. Ihre Exponenten $a_i - a_1$, $2 \leq i \leq n$, sind paarweise verschieden und ihr Koeffizientenvektor $(c_2(a_2 - a_1), \dots, c_n(a_n - a_1)) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist ungleich 0. Nach der Induktionsvoraussetzung hat g höchstens $n - 2$ Nullstellen. Mit dem Satz von Rolle folgt, dass $e^{-a_1} v$ höchstens $n - 1$ Nullstellen hat, und dies gilt auch für v .

(iii) Es sei $K = \mathbb{T} = [0, 2\pi)$ versehen mit der Topologie des Randes des Einheitskreises: Die ε -Umgebung von 0 ist $[0, \varepsilon) \cup (2\pi - \varepsilon, 2\pi)$. Der Raum

$$\mathcal{T}_n = \text{span}(\{\cos(k\cdot) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}; 0 \leq k \leq n\} \cup \{\sin(k\cdot) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}; 1 \leq k \leq n\})$$

ist ein Haar-Raum der Dimension $2n+1$, die Funktionen $1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)$ bilden also ein Chebyshev-System. Dies erkennt man z.B. so: Durch $z = e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ wird eine Bijektion von \mathbb{T} auf den Rand des komplexen Einheitskreises beschrieben. Aus

$$v(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit reellen Koeffizienten a_k, b_k wird in der komplexen Schreibweise nach Multiplikation mit z^n

$$q(z) = \frac{z^n}{2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k(z^k + z^{-k}) - ib_k(z^k - z^{-k})) \right) = \sum_{k=0}^{2n} c_k z^k$$

mit komplexen Koeffizienten c_k . Das komplexe Polynom q hat den Grad $\leq 2n$, also höchstens $2n$ Nullstellen in \mathbb{C} und damit auch höchstens $2n$ Nullstellen auf dem Rand des Einheitskreises.

Auch wenn es momentan seltsam erscheint, so spielen Chebyshev-Systeme auf **endlichen Punktmengen** K eine Rolle bei der Suche nach Proxima. Deshalb stellen wir die folgenden Überlegungen an.

7.15 Bemerkung. Falls der Definitionsbereich K endlich ist, $\#K = n \in \mathbb{N}$, so ist jede Funktion $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig; also ist $C(K)$ isomorph zum \mathbb{R}^n und insbesondere gilt $\dim(C(K)) = n$. Jede Funktion $f \in C(K) \setminus \{0\}$ verschwindet an höchstens $n-1$ Stellen, also ist $C(K)$ selbst ein Haarscher Raum der Dimension n .

Die Eigenschaft für $M \subseteq C(K)$, ein Haarscher Raum der Dimension n zu sein, ist also nur für kompakte Mengen K mit $\#K \geq n+1$ (oder $\#K = \infty$) interessant.

Zur Charakterisierung von Chebyshev-Systemen verwendet man bereits in der Numerik I die sog. **Vandermonde-Determinante**. Für Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(K)$ und Punkte $x_1, \dots, x_n \in K$ setzen wir

$$D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

7.16 Lemma. Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(K)$ seien linear unabhängig. Sie bilden genau dann ein Chebyshev-System, wenn für beliebige paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_n \in K$ gilt:

$$D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beweis. Die Existenz einer Linearkombination

$$v = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k, \quad (c_1, \dots, c_n) \neq 0,$$

die an n paarweise verschiedenen Stellen $x_1, \dots, x_n \in K$ verschwindet, ist äquivalent dazu, dass die zugehörige Vandermonde-Matrix einen nichttrivialen Kern besitzt, also

$$D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = 0$$

erfüllt ist. □

7.17 Bemerkung. Chebyshev-Systeme der Dimension n sind also dadurch charakterisiert, dass sie die eindeutige und universelle Lösbarkeit des Lagrange-Interpolationsproblems zu **beliebigen** paarweise verschiedenen Knoten $x_1, \dots, x_n \in K$ garantieren.

Alfréd Haar ⁶ gibt in seiner Arbeit von 1918 eine weitere Charakterisierung Haarscher Räume $M \subseteq C(K)$: Dies sind genau die Eindeutigkeitsmengen der besten Approximation in $C(K)$. Bevor wir seinen Satz beweisen, benötigen wir als Hilfsaussage eine untere Schranke für die Größe der Menge der Extremalpunkte

$$A_\infty(f - v^*).$$

7.18 Lemma. K sei kompakt und es gelte $\#K \geq n + 1$. Weiter sei $M \subseteq C(K)$ ein Haarscher Raum der Dimension n . Falls $v^* \in M$ Proximum an $f \in C(K)$ ist, so gilt

$$\#A_\infty(f - v^*) \geq n + 1. \quad (7.12)$$

Beweis. Wir nehmen an, dass A_∞ nur $s \leq n$ Elemente $x_1, \dots, x_s \in K$ enthält. Dann ist $K \setminus A_\infty \neq \emptyset$ und hieraus folgt

$$E_M(f) = \|f - v^*\|_\infty > 0.$$

Wir wählen zusätzliche Punkte $x_{s+1}, \dots, x_n \in K \setminus A_\infty$. Dann hat das Lagrange-Interpolationsproblem

$$v(x_k) = -\text{sign}(f(x_k) - v^*(x_k)), \quad 1 \leq k \leq n,$$

eine eindeutige Lösung $v \in M$. Für diese Funktion v berechnen wir leicht

$$\max_{x \in A_\infty(f - v^*)} (f(x) - v^*(x)) v(x) = \max_{1 \leq k \leq s} (f(x_k) - v^*(x_k)) v(x_k) = -E_M(f) < 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zum Kolmogorov-Kriterium in Satz 7.7(c). □

⁶geboren am 11. Oktober 1885 in Budapest; gestorben am 16. März 1933 in Szeged, ungarischer Mathematiker. Haar leistete Beiträge zur Approximationstheorie, Maßtheorie (Haar-Maß auf lokalkompakten Gruppen) und partiellen Differentialgleichungen. Nach ihm wurde auch das Haar-Wavelet (s. Kap. 4) benannt.

7.19 Satz (Haar 1918). *K sei kompakt und es gelte $\#K \geq n$. Ein endlich-dimensionaler Teilraum $M \subseteq C(K)$ ist genau dann ein Haarscher Raum, wenn zu jedem $f \in C(K)$ genau ein Proximum $v^* \in M$ existiert.*

Beweis. Wir setzen $n := \dim(M)$ und geben eine Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ von M vor.

Der Fall $\#K = n$ ist wegen $M = C(K)$ klar, siehe Bemerkung 7.15. Also brauchen wir nur den Fall $\#K \geq n + 1$ (inklusive unendlicher kompakter Mengen K) zu betrachten.

1. Die Eindeutigkeit des Proximums ist notwendig: M sei ein Haarscher Raum und $v_1, v_2 \in M$ seien Proxima zu $f \in C(K)$. Um $v_1 = v_2$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass $v_1 - v_2$ mindestens n Nullstellen besitzt.

Weil die Menge $\Pi_M(f)$ der Proxima konvex ist, ist auch $v := \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ Proximum an f . Die zugehörige Extremalmenge $A_\infty(f - v)$ hat mindestens $n + 1$ Elemente (Lemma 7.18), und für jedes $x \in A_\infty(f - v)$ gilt

$$E_M(f) = |f(x) - v(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\underbrace{|f(x) - v_1(x)|}_{\leq E_M(f)} + \underbrace{|f(x) - v_2(x)|}_{\leq E_M(f)} \right) \leq E_M(f).$$

In den beiden Abschätzungen muss also Gleichheit gelten, dies ist nur für

$$f(x) - v_1(x) = f(x) - v_2(x) = \sigma(x)E_M(f) \quad \text{mit } \sigma(x) \in \{-1, 1\}$$

möglich. Also gilt $v_1(x) = v_2(x)$ für alle $x \in A_\infty(f - v)$ und hieraus folgt $v_1 \equiv v_2$.

2. Die Eindeutigkeit des Proximums ist hinreichend: Wir treffen die Annahme, dass die Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ von M kein Chebyshev-System ist. Nun wollen wir ein $f \in C(K)$ konstruieren, das mehrere Proxima in M besitzt.

Nach Lemma 7.16 existieren paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = 0. \tag{7.13}$$

Die lineare Abhängigkeit der Spalten in (7.11) erlaubt die Wahl von $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ mit

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{7.14}$$

O.B.d.A. wird (a_1, \dots, a_n) so gewählt, dass

$$v_1 := \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in M \quad \text{die Bedingung} \quad \|v_1\|_\infty = 1$$

erfüllt. Also löst v_1 das homogene Interpolationsproblem $v_1(x_k) = 0$ für $1 \leq k \leq n$.

Die lineare Abhängigkeit der Zeilen in (7.11) erlaubt die Wahl von $(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ mit

$$\sum_{k=1}^n c_k \varphi_i(x_k) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

O.B.d.A. wird $\sum_{k=1}^n |c_k| = 1$ gewählt. Dann hat das lineare Funktional

$$\lambda : C(K) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda(g) := \sum_{k=1}^n c_k g(x_k) \quad (7.15)$$

die Norm 1 und erfüllt $\lambda(\varphi_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, also auch $\lambda(v) = 0$ für alle $v \in M$. Wir ziehen dieses Funktional später zum Nachweis heran, dass ein gegebenes Element ein Proximum ist.

Die gesuchte Funktion $f \in C(K)$ ergibt sich nun mit Hilfe des Satzes von Tietze. Zuerst wählen wir $f_1 \in C(K)$ mit

$$\|f_1\|_\infty = 1, \quad f_1(x_k) = \text{sign } c_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Dann setzen wir

$$f(x) := (1 - |v_1(x)|) f_1(x).$$

Wegen $\|v_1\|_\infty = 1$ schließen wir zunächst auf $\|f\|_\infty \leq 1$, und mit

$$\max_{1 \leq k \leq n} |f_1(x_k)| = 1, \quad v_1(x_k) \stackrel{(7.14)}{=} 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n, \quad (7.16)$$

folgt $\|f\|_\infty = 1$. Für das Funktional λ in (7.15) erhalten wir

$$\lambda(f) = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n c_k f_1(x_k) = \sum_{k=1}^n |c_k| = 1. \quad (7.17)$$

Nun zeigen wir: **Jede Funktion** $v_\alpha = \alpha v_1 \in M$ **mit** $0 \leq \alpha \leq 1$ **ist Proximum an** f . Dazu verwenden wir die Charakterisierung der Proxima in Satz 5.2, speziell mit dem bereits konstruierten Funktional in (7.15). Die Eigenschaften

- (i) $\|\lambda\| = 1$,
- (ii) $\lambda(v) = 0$ für alle $v \in M$

wurden bereits nachgewiesen. Die Eigenschaft

$$(iii) \lambda(f) = \|f - v_\alpha\|_\infty$$

folgt aus den drei Relationen $\lambda(f) = 1$ in (7.17),

$$|f(x) - v_\alpha(x)| \leq (1 - |v_1(x)|) \underbrace{|f_1(x)|}_{\leq 1} + \alpha |v_1(x)| \leq 1 - |v_1(x)| + \alpha |v_1(x)| \leq 1$$

und wie in (7.16)

$$\max_{1 \leq k \leq n} |f(x_k) - \underbrace{v_\alpha(x_k)}_{=0}| = \max_{1 \leq k \leq n} |f_1(x_k)| = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass f unendlich viele Proxima in M besitzt. □

Die Haarsche Bedingung ist eine sehr starke Einschränkung an den Teilraum M . Man beachte, dass ja die Elemente von M schon durch die Werte an endlich vielen Stellen eindeutig bestimmt sind (Interpolationseigenschaft). Dies liefert sogar eine noch viel stärkere Einschränkung, die 1956 von Mairhuber und (unabhängig) 1958 von Curtis bewiesen wurde.

7.20 Satz (Mairhuber, Curtis). *Die Menge K sei kompakt. Falls ein Haarscher Raum $M \subseteq C(K)$ der Dimension ≥ 2 existiert, so ist K homöomorph zu einer Teilmenge von \mathbb{R} oder zur kompakten Kreislinie $\mathbb{T} \simeq [0, 2\pi)$.*

Dieser Satz hat einen schönen geometrischen Beweis. Im wesentlichen Schritt zeigt man, dass K keine Teilmenge der Form eines „Verschiebebahnhofs“ enthalten kann: es gibt keine stetige Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow K \times K, \quad \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)),$$

mit $x_1(t) \neq x_2(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $x_1(1) = x_2(0)$, $x_2(1) = x_1(0)$. Denn sonst wäre auf dem Weg von

$$d(0) = D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ x_1(0), x_2(0), x_3, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

nach

$$d(1) = D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ x_1(1), x_2(1), x_3, \dots, x_n \end{pmatrix} = -d(0)$$

eine Vandermonde-Determinante unzulässigerweise 0. (Hierbei sind feste Punkte x_3, \dots, x_n geeignet zu wählen.)

7.3.2 Existenz positiver Funktionen

Wir haben in den bisherigen Beispielen Haarsche Räume betrachtet, die jeweils Funktionen ohne Nullstellen enthalten (z.B. die konstanten Funktionen in \mathcal{P}_n und \mathcal{T}_n oder die Funktionen e^{ax} bei den Exponentialsummen). Es kostet einige Mühe zu zeigen, dass jeder Haarsche Raum $M \subseteq C[a, b]$ oder $C(\mathbb{T})$ eine strikt positive Funktion enthält.

7.21 Satz (Krein). *Es sei $K = [a, b]$ oder $K = \mathbb{T}$. Jeder Haarsche Raum $M \subseteq C(K)$ reeller Funktionen enthält eine strikt positive Funktion.*

Um dies einzusehen, verwenden wir die Notation einfacher und doppelter Nullstellen.

7.22 Definition. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt oder $K = \mathbb{T}$ und $f \in C(K)$.

(a) Ein Punkt $\xi \in K$ mit $f(\xi) = 0$ heißt **einfache** Nullstelle von f , wenn entweder ξ ein Randpunkt von K ist oder f in ξ das Vorzeichen wechselt, d.h. es gilt

$$f(\xi - t)f(\xi + t) < 0 \quad \text{für alle } t \in [\xi - \delta, \xi + \delta].$$

(b) Ein innerer Punkt $\xi \in K$ mit $f(\xi) = 0$ heißt **doppelte** Nullstelle von f , wenn

$$f(\xi - t)f(\xi + t) > 0 \quad \text{für alle } t \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \text{ und } \delta > 0.$$

gilt.

Die Haarsche Bedingung lässt sich nun formulieren, indem man die Vielfachheit der Nullstellen in die Zählung einbezieht.

7.23 Lemma. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt oder $K = \mathbb{T}$. Der Raum $M \subseteq C(K)$ mit $\dim(M) = n$ ist genau dann ein Haarscher Raum (gemäß Definition 7.13), wenn für jedes $v \in M \setminus \{0\}$ die Anzahl $j \in \mathbb{N}_0$ der einfachen Nullstellen und die Anzahl $k \in \mathbb{N}_0$ der doppelten Nullstellen die Ungleichung

$$j + 2k \leq n - 1$$

erfüllt; mit anderen Worten: jedes Element $v \in M \setminus \{0\}$ hat höchstens $n - 1$ Nullstellen unter Berücksichtigung der Vielfachheit.

Beweis. Die neue Bedingung impliziert die Haarsche Bedingung in Definition 7.13. Also ist nur zu zeigen, dass die Bedingung in Definition 7.13 auch die neue Bedingung impliziert. Dazu nehmen wir an, ein $v \in M \setminus \{0\}$ habe

$$j \geq 0 \text{ einfache Nullstellen } \xi_1, \dots, \xi_j \in K,$$

$$k \geq 0 \text{ doppelte Nullstellen } \eta_1, \dots, \eta_k \in K,$$

und es gelte

$$j + 2k \geq n.$$

Die Menge $A_0(v) = \{\xi_1, \dots, \xi_j\} \cup \{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ ist die Menge aller Nullstellen von v . Die Bedingung in Definition 7.13 verlangt

$$\#A_0(v) = j + k \leq n - 1,$$

insbesondere folgt $k \geq 1$. Um jede doppelte Nullstelle η_i wählen wir ein Intervall $[\eta_i - \delta_i, \eta_i + \delta_i] \subseteq K$ mit $\delta_i > 0$, das keine weitere Nullstelle von v enthält. Wir setzen

$$c_i := \text{sign } v(\eta_i - \delta_i) = \text{sign } v(\eta_i + \delta_i)$$

und

$$C := \min_{1 \leq i \leq k} \{|v(\eta_i - \delta_i)|, |v(\eta_i + \delta_i)|\}.$$

Durch Hinzunahme beliebiger Punkte

$$\theta_1, \dots, \theta_{n-j-k} \in K \setminus A_0(v)$$

lässt sich die Interpolationsfunktion $q \in M$ mit

$$q(\eta_i) = c_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad q(\xi_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq j, \quad q(\theta_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n - j - k,$$

bestimmen. Die Funktion $v_\alpha = v - \alpha q \in M$ hat für $0 < \alpha < \frac{C}{\|q\|_\infty}$ die Funktionswerte

$$v_\alpha(\xi_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq j, \quad v_\alpha(\eta_i) = -\alpha c_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k,$$

und die Vorzeichenwechsel

$$c_i = \text{sign } v_\alpha(\eta_i - \delta_i) = -\text{sign } v_\alpha(\eta_i) = \text{sign } v_\alpha(\eta_i + \delta_i).$$

Dies ergibt je zwei Nullstellen von v_α im Intervall $[\eta_i - \delta_i, \eta_i + \delta_i]$. Damit hätte v_α mindestens $j + 2k \geq n$ Nullstellen, ein Widerspruch zur Haarschen Bedingung in Definition 7.13. \square

Es gibt einen Trick, eine Funktion $v \in M$ mit fest vorgegebener Vorzeichenverteilung zu konstruieren. Sei dazu $M \subseteq C(K)$, mit $K = [a, b]$ oder $K = \mathbb{T}$, ein Haarscher Raum der Dimension n . Zu gegebenen

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$$

definieren wir die Funktion

$$v(x) = D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ x_1, \dots, x_{n-1}, x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_{n-1}) & \varphi_2(x_{n-1}) & \cdots & \varphi_n(x_{n-1}) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Die Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile zeigt, dass $v \in M$ gilt. Per Konstruktion ist $v(x_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq n - 1$ und $v(x) \neq 0$ für alle anderen $x \in K \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Nach Lemma 7.23 muss in jedem der Punkte x_i , der im Inneren von K liegt, ein Vorzeichenwechsel von v vorliegen. Also hat v in den Intervallen

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-2}, x_{n-1})$$

abwechselndes Vorzeichen, d.h.

$$(-1)^{i+1} \sigma v(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (x_i, x_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n - 2,$$

wobei σ das Vorzeichen von v im Intervall (x_1, x_2) angibt. Hinzu kommen noch im Fall $K = [a, b]$

$$\begin{aligned} -\sigma v(x) > 0 & \quad \text{für alle } x \in (a, x_1), & \text{falls } x_1 > a, \\ (-1)^n \sigma v(x) > 0 & \quad \text{für alle } x \in (x_{n-1}, b), & \text{falls } x_{n-1} < b, \end{aligned}$$

und im Fall $K = \mathbb{T} = [0, 2\pi)$ (wegen des Zusammenklebens der Intervallenden)

$$-\sigma v(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (0, x_1) \cup (x_{n-1}, 2\pi).$$

Eine kurze Beobachtung lässt sich direkt hieran anschließen.

7.24 Lemma. *Auf $K = \mathbb{T}$ existieren nur Haarsche Räume ungerader Dimension.*

Beweis. Damit in x_{n-1} ein Vorzeichenwechsel von v in der obigen Konstruktion vorliegt, muss $-\sigma \neq (-1)^{n-1} \sigma$ gelten, also muss n ungerade sein. \square

Der vollständige Beweis des Satzes von Krein benutzt den erwähnten Trick geschickt, um die folgenden zwei Aussagen herzuleiten. Die sehr technischen Beweise werden kurz zusammengefasst.

7.25 Lemma. *Sei $K = [a, b]$ oder $K = \mathbb{T}$ und $M \subseteq C(K)$ ein Haarscher Raum der Dimension n . Zu jedem Paar $(j, k) \in \mathbb{N}_0^2$ mit $j + 2k = n - 1$ sowie paarweise verschiedenen Punkten $\xi_1, \dots, \xi_j \in K$, η_1, \dots, η_k im Inneren von K existiert ein $v \in M$ mit einfachen Nullstellen ξ_1, \dots, ξ_j sowie doppelten Nullstellen η_1, \dots, η_k . Insbesondere wechselt v sein Vorzeichen nur in ξ_1, \dots, ξ_j .*

Beweis. Man macht aus den geforderten doppelten Nullstellen η_i je zwei einfache Nullstellen $\eta_i \pm \delta$, ordnet die so entstandene Punktmenge zu

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$$

und bildet die Funktion v_δ wie in (7.18) mit den $n - 1$ einfachen Nullstellen ξ_1, \dots, ξ_j sowie $\eta_i \pm \delta$, $1 \leq i \leq k$. Durch Normalisierung erhält man

$$w_\delta = c_\delta v_\delta = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\delta) \varphi_i$$

mit $\sum_i |\alpha_i(\delta)| = 1$. Das übliche Kompaktheitsargument liefert für $\delta = \delta(m) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ eine konvergente Teilfolge

$$w_{\delta(m_\ell)} \rightarrow w = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$$

mit $\sum_i |\alpha_i| = 1$, also ist $w \neq 0$. Die Funktion w hat, wie alle Folgenglieder $w_{\delta(m)}$, einfache Nullstellen ξ_1, \dots, ξ_j . Weiterhin führt das „Zusammenlaufen“ der beiden einfachen Nullstellen $\eta_i \pm \delta(m)$ zu einer doppelten Nullstelle von w in η_i . \square

7.26 Lemma. Sei $K = [a, b]$ oder $K = \mathbb{T}$ und $M \subseteq C(K)$ ein Haarscher Raum der Dimension n . Zu jedem $0 \leq j \leq n - 1$ (nur gerades j im Fall $K = \mathbb{T}$) sowie paarweise verschiedenen Punkten ξ_1, \dots, ξ_j im Inneren von K existiert ein $v \in M$ mit einfachen Nullstellen in ξ_1, \dots, ξ_j und keinen weiteren Nullstellen.

Aus diesem Lemma folgt der Satz von Krein, indem wir $j = 0$ setzen und das Vorzeichen von v an einer Stelle $x \in K$ positiv wählen.

Beweis. Die Stellen ξ_1, \dots, ξ_j seien streng monoton geordnet.

Im Fall $j = n - 1$ wählen wir

$$v(x) = D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x \end{pmatrix}.$$

Der Fall $j = n - 2$ tritt nur für $K = [a, b]$ auf und dann ist $a < \xi_1 < \dots < \xi_{n-2} < b$. Wir wählen zwei Funktionen

$$\begin{aligned} v_a(x) &= D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ a, \xi_1, \dots, \xi_{n-2}, x \end{pmatrix}, \\ v_b(x) &= \pm D \begin{pmatrix} \varphi_1, \dots, \varphi_n \\ \xi_1, \dots, \xi_{n-2}, b, x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen von v_b so zu wählen ist, dass $\text{sign } v_a(\xi_1 - \delta) = \text{sign } v_b(\xi_1 - \delta)$ für kleine $\delta > 0$ ist. Mit den Überlegungen zu (7.18) folgt dann

$$\text{sign } v_a(x) = \text{sign } v_b(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b) \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_{n-2}\}.$$

Deshalb hat $v = v_a + v_b$ außer den einfachen Nullstellen in ξ_1, \dots, ξ_{n-2} keine weiteren Nullstellen.

Im Fall $j = n - 1 - 2k$ mit $k \geq 1$ wählen wir zwei beliebige Sätze von k Punkten η_i und τ_i , $1 \leq i \leq k$, im Inneren von K , so dass alle Punkte $\xi_1, \dots, \xi_j, \eta_1, \dots, \eta_k, \tau_1, \dots, \tau_k$ paarweise verschieden sind. Die nach Lemma 7.25 gebildeten Funktionen v_1 (zu ξ_i und η_i) sowie $\pm v_2$ (zu ξ_i und τ_i) haben ihre Vorzeichenwechsel nur in ξ_1, \dots, ξ_j , ihre Summe $v = v_1 + v_2$ hat nur ξ_1, \dots, ξ_j als einfache Nullstellen und keine weiteren Nullstellen in K .

Der Fall $j = n - 2 - 2k$ mit $k \geq 1$ tritt nur für $K = [a, b]$ auf und dann ist $a < \xi_1 < \dots < \xi_{n-2-2k} < b$. Wie im vorherigen Fall geben wir zwei Sätze von jeweils k doppelten Nullstellen vor, bilden aber v_1 mit der zusätzlichen einfachen Nullstelle a und v_2 mit b . Der Rest folgt wie zuvor. □

7.3.3 Charakterisierung des Proximums

Die Charakterisierung von Proxima im Polynomraum \mathcal{P}_n durch **Extremalalternanten** wurde bereits 1857 von Tschebyschew ⁷ dargelegt. Zunächst beschreiben wir zwei wesent-

⁷Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (auch Tschebyschew, Tschebyschow, Tschebyschew und insbesondere im Englischen als Chebyshev transkribiert); geb. 16. Mai 1821, gest. 8. Dezember 1894 war einer

liche Begriffe.

7.27 Definition. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt oder $K = \mathbb{T}$ sowie $M \subseteq C(K)$ ein Teilraum. Für $f \in C(K) \setminus M$ und $v \in M$ heißen die Punkte

$$x_0 < x_1 < \dots < x_r$$

(a) eine **Alternante der Länge** $r + 1$, wenn für die Fehlerfunktion $f - v$ gilt

$$(-1)^k \sigma (f(x_k) - v(x_k)) > 0 \quad \text{für } 0 \leq k \leq r,$$

(b) eine **Extremal-Alternante der Länge** r , wenn für die Fehlerfunktion $f - v$ gilt

$$(-1)^k \sigma (f(x_k) - v(x_k)) = \|f - v\|_\infty \quad \text{für } 0 \leq k \leq r.$$

Hierbei ist $\sigma = \text{sign} (f(x_0) - v(x_0))$.

Mit Alternanten lässt sich eine untere Schranke für $E_M(f)$ bestimmen.

7.28 Satz (de la Vallée-Poussin). Es sei $\tilde{K} = [a, b]$ oder $\tilde{K} = \mathbb{T}$ sowie $M \subseteq C(\tilde{K})$ ein Haarscher Raum der Dimension n . Weiter seien $K \subseteq \tilde{K}$ kompakt mit $\#K \geq n + 1$ sowie $f \in C(K)$ und $v \in M$ gegeben. Dann gelten für jede Alternante

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad \text{in } K$$

der Länge $n + 1$ von $f - v$ die Ungleichungen

$$\min_{0 \leq k \leq n} |f(x_k) - v(x_k)| \leq E_M(f) = \inf_{w \in M} \|f - w\|_{\infty, K} \leq \|f - v\|_{\infty, K}.$$

7.29 Bemerkung. Die Einschränkung des Approximationsproblems auf Teilmengen $K \subseteq [a, b]$ bzw. $K \subseteq \mathbb{T}$ wird für viele praktische Zwecke benötigt. Die Haarsche Bedingung ist aber auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ bzw. \mathbb{T} zu erfüllen.

Beweis. Angenommen es existiert $v^* \in M$ mit

$$E := \|f - v^*\|_{\infty, K} < \min_{0 \leq k \leq n} |f(x_k) - v(x_k)|.$$

Mit $\sigma = \text{sign} (f(x_0) - v(x_0))$ folgt für $0 \leq k \leq n$ die Beziehung

$$(-1)^k \sigma (v^*(x_k) - v(x_k)) = (-1)^k \sigma [(f(x_k) - v(x_k)) - (f(x_k) - v^*(x_k))] > 0.$$

Die Funktion $v^* - v \in M \setminus \{0\}$ hat nach dem Zwischenwertsatz mindestens je eine Nullstelle in (x_k, x_{k+1}) , $0 \leq k \leq n - 1$. (Achtung: Hier geht ein, dass $v^* - v$ auf $[a, b]$ bzw. \mathbb{T} definiert ist, nicht nur auf K .) Dies ist ein Widerspruch zur Haarschen Bedingung.

Damit ist die untere Schranke für $E_M(f)$ gezeigt. Die obere Schranke ist klar. □

der bedeutendsten russischen Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Er hat die Wahrscheinlichkeitstheorie fundamental neu aufgebaut, Interpolation und Approximation sowie Algebra und Zahlentheorie erforscht. Mit seinem Namen verbindet man die Chebyshev-Polynome, Chebyshev-Ungleichung, und mancherorts wird die Maximumsnorm als Chebyshev-Norm bezeichnet.

Für eine **Extremalalternante** liefert der Satz von de la Vallée-Poussin bereits die Einschließung

$$\min_{0 \leq k \leq n} |f(x_k) - v(x_k)| = \|f - v\|_{\infty, K} \leq E_M(f) \leq \|f - v\|_{\infty, K},$$

also folgt Gleichheit und v ist Proximum an f . Die Umkehrung ist im Alternantensatz enthalten.

7.30 Satz (Alternantensatz). *Es sei $\tilde{K} = [a, b]$ oder $\tilde{K} = \mathbb{T}$ sowie $M \subseteq C(\tilde{K})$ ein Haarscher Raum der Dimension n . Weiter sei $K \subseteq \tilde{K}$ kompakt mit $\#K \geq n + 1$ sowie $f \in C(K)$.*

Die Funktion $v^ \in M$ ist genau dann Proximum an f auf K , wenn eine Extremalalternante (der Länge $n + 1$)*

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad \text{in } K \tag{7.19}$$

von $f - v^$ existiert.*

Beweis. Wir brauchen nur noch die Existenz einer Extremalalternante (7.19) der Länge $n + 1$ nachzuweisen, wenn v^* Proximum an f ist. Sei dazu $f \in C(K) \setminus M$. Dann ist

$$E_M(f) = \max_{x \in K} |f(x) - v^*(x)| > 0$$

und die Extremalmenge $A_\infty(f - v^*)$ enthält nach Lemma 7.18 mindestens $n + 1$ Elemente.

Wir betrachten nun das lineare Funktional $\lambda : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ aus Satz 7.11 (d),

$$\lambda(g) = \sum_{k=0}^{r-1} p_k \operatorname{sign}(f(x_k) - v^*(x_k)) g(x_k)$$

mit Punkten $x_0 < x_1 < \dots < x_{r-1}$ aus $A_\infty(f - v^*)$, Zahlen $p_k \geq 0$ und $\sum_{k=0}^{r-1} p_k = 1$ sowie $r \leq n + 1$.

1. Zunächst zeigen wir, dass bei diesem Funktional

$$r = n + 1 \quad \text{und} \quad p_k > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq r$$

vorliegen müssen. Wäre eine dieser Eigenschaften verletzt, würde $v \in M$ existieren mit $\lambda(v) \neq 0$: wähle eine Interpolationsfunktion, die an den Stellen x_k mit $p_k > 0$ den Wert $\sigma_k := \operatorname{sign}(f(x_k) - v^*(x_k))$ hat (dies sind höchstens n Stellen).

2. Dann zeigen wir, dass die Vorzeichen $\sigma_k = \operatorname{sign}(f(x_k) - v^*(x_k))$ alternieren. Wäre dies nicht so, dann ließen sich $s \leq n$ Mengen aufeinander folgender Indizes mit gleichem Vorzeichen

$$\sigma_0 = \dots = \sigma_{k_1}, \quad \sigma_{k_1+1} = \dots = \sigma_{k_2}, \quad \dots, \quad \sigma_{k_{s-1}+1} = \dots = \sigma_n,$$

bilden. Die zugehörigen x_k trennen wir mit Punkten $\xi_i \in \tilde{K}$ gemäß

$$x_0, \dots, x_{k_1} < \xi_1 < x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2} < \xi_2 < \dots < \xi_{s-1} < x_{k_{s-1}+1}, \dots, x_n.$$

Die Punkte ξ_i liegen im Inneren von \tilde{K} . Lemma 7.26 erlaubt nun die Wahl von $v \in M \setminus \{0\}$, dessen einzige Nullstellen (in der zusammenhängenden Menge \tilde{K}) die Punkte ξ_1, \dots, ξ_{s-1} sind und die in diesen Punkten das Vorzeichen wechselt. Für dieses v ergibt sich wieder der Widerspruch $\lambda(v) \neq 0$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass die Punkte x_k des Funktionals λ eine Extremalalternante der Länge $n + 1$ sind. □

Zusammenfassung: Die Bedeutung Haarscher Räume als Eindeutigkeitsmengen für die Approximation in $C(K)$ wurde in Satz 7.19 dargelegt. Das Kolmogorov-Kriterium konnte für Haarsche Räume in Form des Alternantensatzes verstärkt werden.

8 Remez-Algorithmus

Wir behandeln in diesem Kapitel einen Algorithmus, benannt nach dem russischen Mathematiker Evgeny Yakovlevich Remez (1896–1975), der zur numerischen Berechnung der Bestapproximation in einem Haarschen Raum eingesetzt wird. Sei dazu $M \subset C(K)$ ein Haarscher Raum der Dimension n sowie $f \in C(K) \setminus M$. Der Algorithmus konstruiert iterativ Alternanten

$$x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

einer Fehlerfunktion $f - v_k$, mit $v_k \in M$, die an den Stellen $x_j^{(k)}$ den gleichen Absolutbetrag annimmt, also

$$d_k = (-1)^j (f - v_k)(x_j^{(k)}) \quad (8.2)$$

erfüllt. Wir sagen, dass die Fehlerfunktion $f - v_k$ in der Punktmenge (8.1) *äqui-oszilliert*. Dann folgt mit dem Satz von de la Vallée-Poussin

$$d_k \leq E_M(f) \leq D_k := \|f - v_k\|_{\infty, K}. \quad (8.3)$$

Die Zahlenfolge $(d_k)_{k \geq 0}$ wird in dieser Konstruktion sogar monoton wachsen und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = E_M(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} D_k \quad (8.4)$$

erfüllen. Dann wird gezeigt, dass die Folge der Elemente $v_k \in M$ gleichmäßig gegen das eindeutige Proximum v^* von f konvergiert.

Die Bestätigung, dass es zu genau $n + 1$ gegebenen paarweise verschiedenen Punkten

$$B = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \subset K$$

eine Funktion $v \in M$ gibt, deren Fehlerfunktion $f - v$ wie in (8.2) äqui-oszilliert, liefert bereits der Alternantensatz. Wir halten dieses wichtige Teilergebnis separat fest.

8.1 Satz. *Es sei $\tilde{K} = [a, b]$ oder $\tilde{K} = \mathbb{T}$ sowie $M \subset C(\tilde{K})$ ein Haarscher Raum der Dimension n . Weiter sei $K \subset \tilde{K}$ kompakt mit $\#K \geq n + 1$ sowie $f \in C(K)$. Dann existieren zu jeder Teilmenge*

$$B = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \subset K$$

eindeutig bestimmte Elemente $v \in M$ und $d \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x_j) - v(x_j) = (-1)^j d. \quad (8.5)$$

Beweis. Die Einschränkung $f|_B: B \rightarrow \mathbb{R}$ von f ist ein Element von $C(B)$. Das eindeutige Proximum $v \in M$ (eigentlich $v|_B$ mit $v \in M$) ist durch die Extremalalternante

$$f(x_j) - v(x_j) = (-1)^j \sigma \|f - v\|_{\infty, B}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

mit $\sigma \in \{-1, 1\}$ charakterisiert. Die Aussage folgt mit $d = \sigma \|f - v\|_{\infty, B} = \pm E_{M|_B}(f|_B)$. \square

Eine einfache Folgerung aus dem obigen Satz ist ein wichtiger Bestandteil des Algorithmus.

8.2 Folgerung. Die Voraussetzungen in Satz 8.1 seien erfüllt. Weiter sei $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ eine Basis von M . Dann ist die zur Teilmenge

$$B = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset K$$

gebildete Matrix

$$W := \begin{bmatrix} \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) & 1 \\ \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) & (-1)^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$$

regulär. Weiterhin gilt:

(a) Die Lösung $[c_1, \dots, c_n, d]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ des linearen Gleichungssystems

$$W [c_1, \dots, c_n, d]^T = [f(x_0), \dots, f(x_n)]^T \quad (8.6)$$

liefert sowohl das (diskrete) Proximum $v = \sum_i c_i v_i$ zu $f|_B$ als auch den Approximationsgrad $E_M(f|_B) = |d|$.

(b) Die Lösung $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{R}^{n+1}$ des linearen Gleichungssystems

$$\alpha W = [0, \dots, 0, 1] \quad (8.7)$$

erfüllt die Beziehungen $(-1)^j \alpha_j > 0$ und $\sum_j (-1)^j \alpha_j = 1$. Sie liefert das lineare Funktional

$$\lambda_B : C(B) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda_B(g) = \sum_{j=0}^n \alpha_j g(x_j), \quad (8.8)$$

in Satz 5.11(d), es gilt nämlich

(i) $\|\lambda_B\| = 1$, (ii) $\lambda_B(v|_B) = 0$ für alle $v \in M$, (iii) $|\lambda_B(f|_B)| = E_{M|_B}(f|_B)$.

Beweis. Die Gleichung (8.5) wird geschrieben als

$$v(x_j) + (-1)^j d = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Mit der Basis $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ von M und $v = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$ lässt sich dies als lineares Gleichungssystem

$$W [c_1, \dots, c_n, d]^T = [f(x_0), \dots, f(x_n)]^T$$

schreiben. Die eindeutige Lösbarkeit für beliebige rechte Seiten ist gleichbedeutend mit der Invertierbarkeit von W . Außerdem folgt sofort die Aussage (a).

Zum Beweis von (b) vergleichen wir das lineare Funktional λ_B in (8.8) mit dem Funktional aus Satz 5.11(d), das auch im Beweis des Alternantensatzes auftrat. Wegen $\#B = n + 1$ und Lemma 6.6 muss gelten $A_\infty(f|_B - v|_B) = B$. Also lautet das Funktional zur Extremalalternante von $f|_B - v|_B$

$$\lambda : C(B) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda(g) = \sum_{j=0}^n p_j \text{sign}(f(x_j) - v(x_j)) g(x_j).$$

Hierbei sind alle $p_j > 0$, $\sum_j p_j = 1$ und die Sequenz $\sigma_j := \text{sign}(f(x_j) - v(x_j))$, $0 \leq j \leq n$, hat alternierendes Vorzeichen. Die Zahlen $\beta_j := (-1)^j p_j = \sigma_0 p_j \sigma_j$ sind dann eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$[\beta_0, \dots, \beta_n] W = [0, \dots, 0, 1],$$

denn die ersten n Gleichungen gelten wegen $\lambda(\phi_i) = 0$ und die letzte Gleichung wegen $\sum_j (-1)^j \beta_j = \sum_j p_j = 1$. Die Invertierbarkeit von W liefert $\alpha_j = \beta_j$, und hieraus folgen die geforderten Eigenschaften der Zahlen α_j sowie $\lambda_B = \sigma_0 \lambda$, also auch die Eigenschaften von λ_B . \square

8.3 Bemerkung. Das lineare Gleichungssystem

$$W [c_1, \dots, c_n, d]^T = [f(x_0), \dots, f(x_n)]^T$$

lässt sich im Fall $M = \mathcal{P}_{n-1}$ vereinfachen. Hierbei wird zuerst die Komponente $d \in \mathbb{R}$ berechnet und anschließend die Interpolationsaufgabe

$$v(x_j) = f(x_j) + (-1)^j d, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

gelöst. (Die Interpolationsbedingung an der Stelle x_n ergibt sich daraus automatisch!) Zur Berechnung von d benötigt man die *dividierten Differenzen*

$$\begin{aligned} s_B &:= [x_0, \dots, x_n | s] \neq 0 \quad \text{mit} \quad s \in C(B), \quad s(x_j) = (-1)^j, \\ f_B &:= [x_0, \dots, x_n | f] \end{aligned}$$

und erhält $d = \frac{f_B}{s_B}$. Denn: Das diskrete Proximum $v|_B$ erfüllt

$$f(x_j) = v(x_j) + ds(x_j), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Die dividierte Differenz n -ter Ordnung annulliert v , also gilt $f_B = ds_B$. Die Beziehung $s_B \neq 0$ ist wieder eine Konsequenz der Haarschen Bedingung. (s_B ist der Höchstkoeffizient

des Interpolationspolynoms vom Grad n zu den Daten $s(x_j) = (-1)^j$. Dieses Polynom muss den exakten Grad n haben, da es n Nullstellen besitzt, aber nicht identisch verschwindet.)

Bemerkenswert ist ebenfalls, dass das lineare Funktional in Folgerung 8.2 gegeben ist durch das Vielfache der dividierten Differenz

$$\lambda_B(g) = \frac{1}{s_B} [x_0, \dots, x_n | g].$$

Dies liefert eine explizite Darstellung der Koeffizienten α_j in (8.8), nämlich

$$\alpha_j = \frac{1}{s_B} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_\ell}.$$

Als weitere Konsequenz aus der Folgerung 8.2 halten wir eine Form von ‘‘Definitheit’’ des Funktional

$$\mu(v) = \max_{0 \leq j \leq n} (-1)^j v(x_j)$$

fest.

8.4 Lemma. $M \subset C(\tilde{K})$, mit $\tilde{K} = [a, b]$ oder \mathbb{T} , sei ein Haarscher Raum der Dimension n . Dann existiert zu Punkten

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad \text{in} \quad \tilde{K}$$

ein $0 < \gamma < 1$ so, dass für alle $v \in M$

$$\gamma \|v\|_{\infty, \tilde{K}} \leq \max_{0 \leq j \leq n} (-1)^j v(x_j) \leq \|v\|_{\infty, \tilde{K}} \quad (8.9)$$

gilt.

Bemerkung: Die Eigenschaft (8.9) sieht aus wie die Äquivalenz von Normen. Würde man an Stelle des Funktional μ das Funktional

$$\beta(v) = \max_{0 \leq j \leq n} |v(x_j)|$$

verwenden, so wäre hierdurch tatsächlich eine äquivalente Norm auf M definiert: die Haarsche Bedingung ergibt die Definitheit, und die weiteren Axiome der Norm sind erfüllt. Die Äquivalenz zur Maximum-Norm folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf M .) In unserem Fall ist durch μ aber keine Norm definiert, da im Allgemeinen $v \in M$ existiert mit $\mu(-v) \neq \mu(v)$.

Beweis. Die obere Abschätzung ist trivial.

Für die untere Abschätzung verwenden wir Folgerung 8.2. Sei dazu $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ eine Basis von M und W die $(n+1) \times (n+1)$ Matrix zur gegebenen Punktmenge $B = \{x_0, \dots, x_n\}$.

Weiter sei $\alpha = [\alpha_0, \dots, \alpha_n]$ der Lösungsvektor des Gleichungssystems $\alpha W = [0, \dots, 0, 1]$. Insbesondere kennen wir das Vorzeichenverhalten $(-1)^j \alpha_j > 0$ für $0 \leq j \leq n$.

Für beliebiges $v = \sum_i c_i \phi_i \in M \setminus \{0\}$ gilt dann

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j v(x_j) = \alpha W [c_1, \dots, c_n, 0]^T = [0, \dots, 0, 1] [c_1, \dots, c_n, 0]^T = 0. \quad (8.10)$$

Die Annahme $\max_{0 \leq j \leq n} (-1)^j v(x_j) \leq 0$ führt mit der Haarschen Bedingung auf

$$(-1)^j v(x_j) < 0 \quad \text{für mindestens zwei } 0 \leq j \leq n.$$

Dann ist aber

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j v(x_j) = \sum_{j=0}^n \underbrace{(-1)^j \alpha_j}_{> 0} \underbrace{(-1)^j v(x_j)}_{\leq 0} < 0,$$

im Widerspruch zu (8.10). Also gilt

$$\max_{0 \leq j \leq n} (-1)^j v(x_j) > 0 \quad \text{für alle } v \in M \setminus \{0\}. \quad (8.11)$$

Die linearen Funktionale $\mu_j : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu_j(v) = (-1)^j v(x_j)$ sind offensichtlich stetig, deshalb ist auch $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(v) = \max_j \mu_j(v)$ stetig. Auf der kompakten Menge $M_1 = \{v \in M; \|v\| = 1\}$ nimmt μ sein Minimum an, und wegen (8.11) gilt

$$\gamma := \min_{v \in M_1} \mu(v) > 0.$$

Die positive Homogenität $\mu(cv) = c\mu(v)$ (mit $c > 0$) liefert nun

$$\gamma \|v\| \leq \mu(v) \quad \text{für alle } v \in M. \quad \square$$

Mit diesen Ergebnissen werden zwei wichtige Eigenschaften Haarscher Räume gezeigt, die nochmals die Bedeutung der Haarschen Bedingung unterstreichen.

8.5 Satz. [Newman, Shapiro, 1963: Starke Eindeutigkeit des Proximums]

Es sei $\tilde{K} = [a, b]$ oder \mathbb{T} und $M \subset C(\tilde{K})$ sei ein Haarscher Raum. Weiter sei $K \subset \tilde{K}$ mit $\#K \geq n + 1$. Dann existiert zu $f \in C(K)$ eine Konstante $\gamma = \gamma(f) > 0$ mit

$$\|f - v\|_{\infty, K} \geq \|f - \Pi_M(f)\|_{\infty, K} + \gamma \|v - \Pi_M(f)\|_{\infty, K}.$$

Beweis. Wir setzen $n = \dim M$, $v^* = \Pi_M(f)$ und wählen eine Extremalalternante

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad \text{in} \quad A_\infty(f - v^*).$$

Die Vorzeichen

$$\sigma_j = \sigma(-1)^j = \text{sign}(f(x_j) - v^*(x_j)), \quad 0 \leq j \leq n,$$

alternieren. Für beliebiges $v \in M$ und $0 \leq j \leq n$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f - v\|_{\infty, K} &\geq \sigma_j(f - v)(x_j) = \underbrace{\sigma_j(f - v^*)(x_j)} + \sigma_j(v^* - v)(x_j). \\ &= \|f - v^*\|_{\infty, K} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\|f - v\|_{\infty, K} \geq \|f - v^*\|_{\infty, K} + \max_{0 \leq j \leq n} \sigma_j(v^* - v)(x_j).$$

Mit Lemma 8.4 folgt die Existenz der Konstante γ in der Behauptung. \square

Als weiteres Ergebnis halten wir eine Eigenschaft der metrischen Projektion Π_M auf einen Haarschen Raum fest.

8.6 Satz (Freud 1958: Lokale Lipschitz-Stetigkeit der metrischen Projektion). *Die Voraussetzungen aus Satz 8.5 seien erfüllt und $f \in C(K) \setminus M$ sei gegeben. Dann gilt mit $\gamma = \gamma(f)$ aus Satz 8.5 die Abschätzung*

$$\|\Pi_M(f) - \Pi_M(g)\|_{\infty, K} \leq \frac{2}{\gamma} \|f - g\|_{\infty, K} \quad \text{für alle } g \in C(K).$$

Beweis. Mit γ aus Satz 8.5 und Umstellen der Ungleichung der starken Eindeutigkeit folgt

$$\begin{aligned} \gamma \|\Pi_M(f) - \Pi_M(g)\| &\leq \|f - \Pi_M(g)\| - \|f - \Pi_M(f)\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - \Pi_M(g)\| - \|f - \Pi_M(f)\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - \Pi_M(f)\| - \|f - \Pi_M(f)\| \\ &\leq \|f - g\| + \|f - g\| = 2\|f - g\|. \quad \square \end{aligned}$$

Wir können nun den Remez-Algorithmus in seiner einfachsten Form formulieren und die lineare Konvergenz beweisen.

8.7 Algorithmus. (Remez-Algorithmus mit einfachem Austauschschritt (1934))

Gegeben: $M \subset C(\tilde{K})$ Haarscher Raum mit Basis $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$,

$K \subset \tilde{K}$ mit $\#K \geq n + 1$ und $f \in C(K)$.

Start: Wähle eine Punktmenge $B_0 = \{x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \dots < x_n^{(0)}\}$.

Iteration: Für $k = 0, 1, 2, \dots$

- berechne $v_k \in M$ und $d_k \in \mathbb{R}$ mit

$$v_k(x_j^{(k)}) + (-1)^j d_k = f(x_j^{(k)}), \quad 0 \leq j \leq n,$$

durch Lösung des linearen Gleichungssystems (8.6);

- berechne (eine gute Näherung von)

$$D_k = \|f - v_k\|_{\infty, K}$$

und einen Punkt ξ , an dem das Maximum oder Minimum angenommen wird;

- falls $D_k - |d_k| < \epsilon$, so ist B_k (fast) Extremalalternante und v_k eine geeignete Näherung an das Proximum;
- sonst bestimme B_{k+1} nach folgender Regel:
 - falls $x_j^{(k)} < \xi < x_{j+1}^{(k)}$ gilt, so setze

$$\ell = \begin{cases} j, & \text{falls } (f - v_k)(x_j^{(k)}) \cdot (f - v_k)(\xi) > 0, \\ j + 1, & \text{falls } (f - v_k)(x_{j+1}^{(k)}) \cdot (f - v_k)(\xi) > 0; \end{cases}$$

im Fall $\tilde{K} = \mathbb{T}$ wird hier auch die Situation $x_n^{(k)} < \xi < x_0^{(k)} + 2\pi$ sowie $x_n^{(k)} - 2\pi < \xi < x_0^{(k)}$ einbezogen. Sodann setze

$$B_{k+1} = \{x_0^{(k)} < \dots < x_{\ell-1}^{(k)} < \xi < x_{\ell+1}^{(k)} < \dots < x_n^{(k)}\},$$

- nur im Fall $\tilde{K} = [a, b]$ wird für $\xi < x_0^{(k)}$ (und $\xi > x_n^{(k)}$ entsprechend) gesetzt

$$B_{k+1} = \begin{cases} \{\xi < x_1^{(k)} < \dots < x_n^{(k)}\}, & \text{falls } (f - v_k)(x_0^{(k)}) \cdot (f - v_k)(\xi) > 0, \\ \{\xi < x_0^{(k)} < \dots < x_{n-1}^{(k)}\}, & \text{falls } (f - v_k)(x_0^{(k)}) \cdot (f - v_k)(\xi) < 0; \end{cases}$$

in diesem ‘‘Extremfall’’ können die $x_j^{(k)}$ evtl. um einen Index nach rechts (bzw. links) rücken;

INSGESAMT trifft also die Wahl auf ein $0 \leq \ell \leq n$ mit $x_\ell^{(k+1)} = \xi$ und ein $\rho \in \{-1, 0, 1\}$ mit $x_j^{(k+1)} = x_{j+\rho}^{(k)}$ für $j \neq \ell$.

- und fahre mit der neuen Punktmenge B_{k+1} fort.

Die Glieder der Folgen $(d_k)_{k \geq 0}$ und $(D_k)_{k \geq 0}$ erfüllen

$$|d_k| \leq E_M(f) = \min_{v \in M} \|f - v\|_{\infty, K} \leq D_k, \quad k \geq 0.$$

Bei der praktischen Durchführung beachte man, dass genau der Fall $\rho = \pm 1$ zu einem Vorzeichenwechsel in der Folge (d_k) führt. Wir zeigen nun, dass monotone und lineare Konvergenz $|d_k| \rightarrow E_M(f)$ vorliegt und dass auch die Folge v_k linear (bzgl. der Maximum-Norm auf K) gegen das Proximum v^* konvergiert.

8.8 Satz. (Lineare Konvergenz des Remez-Algorithmus) *Der Remez-Algorithmus mit einfachem Austauschschritt konvergiert linear. Genauer: zu $f \in C(K) \setminus M$ existieren Konstanten $0 < c < 1$ und $\gamma > 0$, die nur von f , der gewählten Basis von M und der Start-Punktmenge B_0 abhängen, mit*

$$(i) \quad E_M(f) - |d_k| \leq (1 - c)^k D_0,$$

$$(ii) \quad \|v_k - v^*\|_{\infty, K} \leq (1 - c)^k \frac{D_0}{c\gamma}.$$

Außerdem ist die Folge der $|d_k|$ streng monoton wachsend.

Beweis. Der Kern des Beweises besteht darin, die Existenz von $0 < c < 1$ zu zeigen mit der Eigenschaft

$$|d_{k+1}| \geq |d_k| + c(D_k - |d_k|). \quad (8.12)$$

Dann folgen nämlich die Behauptungen der Monotonie von $(|d_k|)_{k \geq 0}$ sowie beide Aussagen (i) und (ii):

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} E_M(f) - |d_{k+1}| &\leq E_M(f) - |d_k| - c(D_k - |d_k|) \\ &\leq E_M(f) - |d_k| - c(E_M(f) - |d_k|) \quad (\text{wegen } D_k \geq E_M(f)) \\ &= (1 - c)(E_M(f) - |d_k|). \end{aligned}$$

Durch Iteration folgt

$$E_M(f) - |d_k| \leq (1 - c)^k (E_M(f) - |d_0|) \leq (1 - c)^k E_M(f) \leq (1 - c)^k D_0.$$

(ii) Mit der Konstanten $\gamma = \gamma(f)$ aus dem Satz von Newman, Shapiro (Satz 8.5) gilt

$$\begin{aligned} \gamma \|v_k - v^*\| &\leq \|f - v_k\| - \|f - v^*\| \\ &\leq D_k - E_M(f) \leq D_k - |d_k| \\ &\leq \frac{1}{c} (|d_{k+1}| - |d_k|) \quad (\text{wegen (8.12)}) \\ &\leq \frac{1}{c} (E_M(f) - |d_k|) \leq \frac{(1 - c)^k}{c} D_0. \end{aligned}$$

Um die Beziehung (8.12) zu zeigen, verwenden wir das Funktional λ_B mit $B = B_{k+1}$ in (8.8). Die Koeffizienten des Funktionals seien mit $\alpha_j^{(k+1)}$ bezeichnet. Wir erinnern nochmals an die Beziehungen

$$(-1)^j \alpha_j^{(k+1)} > 0$$

in Folgerung 8.2 und die Bezeichnungen im k -ten Austauschschritt mit

$$\begin{aligned} x_\ell^{(k+1)} &= \xi, & |(f - v_k)(\xi)| &= D_k, & \text{sign}(f - v_k)(\xi) &= (-1)^{\ell+\rho} \text{sign } d_k, \\ x_j^{(k+1)} &= x_{j+\rho}^{(k)}, & (f - v_k)(x_{j+\rho}^{(k)}) &= (-1)^{j+\rho} d_k, \end{aligned}$$

mit einem $0 \leq \ell \leq n$ und $\rho \in \{-1, 0, 1\}$. Wir setzen noch $\sigma = \text{sign } d_k$.

Wegen $\lambda_{B_{k+1}}(v) = 0$ für alle $v \in M$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
d_{k+1} &= \lambda_{B_{k+1}}(f) = \lambda_{B_{k+1}}(f - v_k) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(k+1)}(f - v_k)(x_j^{(k+1)}) \\
&= \alpha_\ell^{(k+1)}(f - v_k)(\xi) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^n \alpha_j^{(k+1)}(f - v_k)(x_{j+\rho}^{(k)}) \\
&= \alpha_\ell^{(k+1)} (-1)^{\ell+\rho} \sigma D_k + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^n \alpha_j^{(k+1)} (-1)^{j+\rho} d_k \\
&= (-1)^\rho \left\{ |\alpha_\ell^{(k+1)}| \sigma D_k + d_k \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^n |\alpha_j^{(k+1)}| \right\} \\
&= (-1)^\rho \sigma \left\{ |\alpha_\ell^{(k+1)}| (D_k - |d_k|) + |d_k| \sum_{j=0}^n |\alpha_j^{(k+1)}| \right\} \\
&= (-1)^\rho \sigma \left\{ |\alpha_\ell^{(k+1)}| (D_k - |d_k|) + |d_k| \right\} \quad (\text{wegen } \sum_j |\alpha_j^{(k+1)}| = 1).
\end{aligned}$$

Dies ergibt die Gleichung

$$|d_{k+1}| = |d_k| + |\alpha_\ell^{(k+1)}| (D_k - |d_k|), \quad (8.13)$$

aus der die strikte Monotonie der Folge $(|d_k|)_{k \geq 0}$ folgt. Sobald wir gezeigt haben, dass eine untere Schranke $0 < c < 1$ von $|\alpha_\ell^{(k+1)}|$ existiert, die unabhängig von k und ℓ ist, ist die Ungleichung (8.12) bewiesen. Damit ist dann der Konvergenzsatz 8.8 komplett bewiesen. \square

8.9 Lemma. *Die Funktion $f \in C(K) \setminus M$ und die Startmenge B_0 des Remez-Algorithmus seien gegeben. Dann gibt es $0 < c < 1$ und $C > 0$ mit:*

- (i) $x_{j+1}^{(k)} - x_j^{(k)} \geq C$ für alle $k \geq 0$ und $0 \leq j \leq n-1$ (sowie $x_0^{(k)} + 2\pi - x_n^{(k)} \geq C$ im Fall $\tilde{K} = \mathbb{T}$).
- (ii) $|\alpha_j^{(k)}| \geq c$ für alle $0 \leq j \leq n$, $k \geq 0$.

Beweis. Die Mengen B_k werden im Fall $\tilde{K} = [a, b]$ als Punkte in

$$\mathcal{S} = \{[y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^{n+1}; a \leq y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq b\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

angesehen. Diese Menge ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Im Fall $\tilde{K} = \mathbb{T}$ ist

$$\mathcal{S} = \{[y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{T}^{n+1}; 0 \leq y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n < 2\pi\} \subset \mathbb{T}^{n+1}$$

ebenfalls kompakt.

- (i) Angenommen, es existiert eine Teilfolge $[x_0^{(k_m)}, \dots, x_n^{(k_m)}]$, $m \geq 0$, die gegen einen Randpunkt von \mathcal{S} konvergiert, für die also

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(k_m)} = \xi_j, \quad 0 \leq j \leq n,$$

und

$$\xi_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_n$$

mit mindestens einem Gleichheitszeichen (bzw. $\xi_0 = \xi_n$ im Fall $\tilde{K} = \mathbb{T}$) gilt. Dann existiert eine Funktion $v \in M$, die die höchstens n Interpolationsbedingungen

$$v(\xi_j) = f(\xi_j), \quad 0 \leq j \leq n,$$

erfüllt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f - v$ gilt

$$|(f - v)(x) - (f - v)(y)| < |d_1| \quad \text{für alle} \quad |x - y| < \delta$$

mit hinreichend kleinem $\delta > 0$. (Wir verwenden hier $|d_1| > 0$ als das ‘‘epsilon’’ in der gleichmäßigen Stetigkeit.) Wählen wir nun m so groß, dass

$$|x_j^{(k_m)} - \xi_j| < \delta \quad \text{für} \quad 0 \leq j \leq n$$

gilt, so erhalten wir zusammen mit der bereits bewiesenen Monotonie der $|d_k|$

$$|(f - v)(x_j^{(k_m)})| = |(f - v)(x_j^{(k_m)}) - (f - v)(\xi_j)| < |d_1| < |d_{k_m}| \quad \text{für} \quad 0 \leq j \leq n,$$

im Widerspruch zur Definition von d_{k_m} . Deshalb ist die Annahme falsch. Damit ist die Existenz von $C > 0$ in der Behauptung (i) gezeigt.

- (ii) Die im Fall $\tilde{K} = [a, b]$ zu $C > 0$ gebildete Teilmenge

$$\mathcal{S}_C = \{[y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^{n+1}; a \leq y_0 < y_1 < \dots < y_n \leq b, y_{j+1} - y_j \geq C \text{ für } 0 \leq j \leq n-1\} \subset \mathcal{S}$$

ist kompakt. Im Fall $\tilde{K} = \mathbb{T}$ wird entsprechend

$$\mathcal{S}_C = \{[y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{T}^{n+1}; 0 \leq y_0 < y_1 < \dots < y_n < 2\pi, y_{j+1} - y_j \geq C \text{ für } 0 \leq j \leq n-1, y_0 + 2\pi - y_n \geq C\}$$

gebildet. Die zu einem Punkt $B \in \mathcal{S}_C$ gebildete Matrix W in Folgerung 8.2 ist regulär. Auf dem Kompaktum \mathcal{S}_C nimmt $|\det W|$ sein Minimum und Maximum an,

$$0 < \kappa_1 \leq |\det W| \leq \kappa_2.$$

Ebenso sind die Unter-Determinanten von W der Form

$$D \begin{pmatrix} & \phi_1, \dots, \phi_n \\ y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n \end{pmatrix},$$

die in der Cramer'schen Regel zur Berechnung der Lösung von $\alpha W = [0, \dots, 0, 1]$ auftreten, ungleich Null. Ihr Absolutbetrag nimmt auf dem Kompaktum \mathcal{S}_C sein Minimum $\tau > 0$ an. Damit erhalten wir die globale Abschätzung

$$|\alpha_j| \geq \tau/\kappa_2 =: c > 0$$

für die Koeffizienten α_j , die sich in Folgerung 8.2 für eine Punktmenge mit dem Mindestabstand C wie in \mathcal{S}_C ergeben. \square

Zusammenfassung: Die Bestapproximation im diskreten Fall $\#K = n + 1$ wird durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt. Die Matrix dieses Gleichungssystems liefert auch das lineare Funktional aus Satz 5.11(d). Aus dieser Beobachtung lassen sich die Aussagen von Newman, Shapiro und von Freud über die starke Eindeutigkeit und die lokale Lipschitzstetigkeit der metrischen Projektion herleiten. Weiterhin bildet sie die Basis für den Konvergenzbeweis des Remez-Algorithmus.