9.1 Definition: Splinefunktion

Eine Splinefunktion ist eine stückweise polynomiale Funktion $s : [a, b] \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch die Angaben:

- Knoten $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$
- Polynomgrad $r - 1$ (bzw. Ordnung r)
- Polynomstücke $s_k := s|_{(x_k, x_{k+1})} \in \mathcal{P}_{r-1}$ für $0 \leq k \leq n$
- Übergangsbedingungen $s \in C^{r-1-\mu_k}(x_k - \delta, x_k + \delta)$, $1 \leq k \leq n$. Die Zahl $\mu_k \in \mathbb{N}$ heißt die *Vielfachheit* des Knotens x_k; bei *einfachem* Knoten wird also die Maximalforderung $s \in C^{r-2}(x_k - \delta, x_k + \delta)$ gestellt.

B-Splines (=Basis-Splines)

9.2 Definition: B-Spline

Zu $r \in \mathbb{N}$ und Knoten $x_0 \leq x_1 < \cdots \leq x_{n+1}$ ist der *normalisierte B-Spline r-ter Ordnung*

$$N_{r,k}(x) = N_r(x; x_k, \ldots, x_{k+r}) = (x_{k+r} - x_k)[x_k, \ldots, x_{k+r} \mid (\cdot - x)_+^{r-1}],$$

für $k = 0, 1, \ldots, n - r + 1$ definiert. Hierbei wird die dividierte Differenz $[x_k, \ldots, x_{k+r} \mid f]$ r-ter Ordnung zu den Knoten $x_k, \ldots, x_{k+r}$ der abgebrochenen Potenzfunktion

$$f(t) = (t - x)_+^{r-1} = \begin{cases} (t - x)^{r-1}, & t \geq x, \\ 0, & t < x \end{cases}$$

gebildet.

Beispiel:

$$N_3(x; 0, 1, 2, 3) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ und } x > 3, \\ x^2/2, & 0 \leq x < 1, \\ 3/4 - (x - 3/2)^2, & 1 \leq x < 2, \\ (3 - x)^2/2, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

9.3 Eigenschaften der B-Splines:

- $N_{r,k}(x) > 0$ für alle $x \in (x_k, x_{k+r})$ und $N_{r,k}(x) = 0$ für $x < x_k$ und $x > x_{k+r}$.
- Wenn der Knoten x_{k+j}, $0 \leq j \leq r$, genau μ_j mal in $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+r})$ auftritt, so ist $N_{r,k}$ genau $(r-1-\mu_j)$-mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_{k+j}.
- Rekursion von Cox und de Boor:
$$N_{r,k}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+r-1} - x_k} N_{r-1,k}(x) + \frac{x_{k+r} - x}{x_{k+r} - x_{k+1}} N_{r-1,k+1}(x)$$
in allen Stetigkeitspunkten der rechten Seite.
- Rekursion der Ableitung:
$$N'_{r,k}(x) = \frac{r-1}{x_{k+r-1} - x_k} N_{r-1,k}(x) - \frac{r-1}{x_{k+r} - x_{k+1}} N_{r-1,k+1}(x)$$
in allen Stetigkeitspunkten der rechten Seite.

9.4 Basis-Eigenschaft

Gegeben sei ein Intervall $[a, b]$ sowie Knoten

$$X = \{x_{-r+1} = \cdots = x_0 = a < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n < x_{n+1} = \cdots = x_{n+r} = b\}$$

mit $x_{k+r} - x_k > 0$ für alle $-r+1 \leq k \leq n$. Dann sind die B-Splines

$$N_{r,k} = N_r(\cdot; x_k, \ldots, x_{k+r}), \qquad -r+1 \leq k \leq n,$$

linear unabhängig; sie bilden eine Basis von $\mathcal{S}_{r-1}(X; [a, b]) =$

$$\{s : [a, b] \to \mathbb{R}; s|_{(x_j, x_{j+1})} \in \mathcal{P}_{r-1}, \quad s \in C^{r-1-\mu_j}(x_j - \delta, x_j + \delta)\}$$

wobei μ_j die Vielfachheit des Knotens x_j in X bezeichnet.

Beachte: $\dim \mathcal{S}_{r-1}(X; [a, b]) = n + r$

9.5 Eigenschaften der B-Spline Basis

- Teilung der Eins:

$$\sum_{k=-r+1}^{n} N_{r,k}(x) \equiv 1, \qquad x \in [a,b].$$

- Stabilitätssatz von de Boor (1973): Es existiert eine Konstante M_r so, dass für alle Koeffizientenfolgen $(c_k)_{-r+1 \le k \le n}$ gilt

$$M_r \|(c_k)\|_\infty \le \left\| \sum_{k=-r+1}^{n} c_k N_{r,k} \right\|_{\infty,[a,b]} \le \|(c_k)\|_\infty.$$

Wir setzen

$$\sigma_{r-1}(f;X) := E(f;\mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])) = \inf_{s\in\mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])} \|f-s\|_{\infty,[a,b]},$$

Beachte: $\mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])$ ist kein Haarscher Raum (s kann ja auf ganzen Intervallen identisch 0 sein.) Für jedes $f \in C[a,b]$ existiert zwar immer ein Proximum $s^*(f) \in \mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])$, dieses muss jedoch nicht eindeutig sein. Die Eigenschaften der B-Splines erlauben dennoch eine "lokale Charakterisierung" der Proxima.

9.6 Alternantensatz für die Spline-Approximation

Die Funktion $s \in \mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])$ ist genau dann ein Proximum an $f \in C[a,b]$, wenn es ein Intervall $J := [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ und eine Extremalalternante

$$\alpha \le \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{m(J)} \le \beta$$

in J gibt (also $f(\xi_k) - s(\xi_k) = \epsilon(-1)^k \|f-s\|_{\infty,[a,b]}$ mit $\epsilon \in \{-1,1\}$ gilt), wobei

$$m(J) = \dim \mathcal{S}_{r-1}(X;J)$$

die Dimension des Teilraums von $\mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])$ ist, der durch die Einschränkung der Splines auf das Intervall J entsteht.

Aussagen zur Approximationgüte werden in Abhängigkeit der maximalen Schrittweite

$$h_X := \max_{-r+1 \leq k \leq n} (x_{k+1} - x_k)$$

angegeben.

9.7 Satz

Zu $r \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq r$ und dem Knotenvektor X in 9.4 existieren Konstante C_j so, dass für alle $f \in C^j[a,b]$ gilt

$$\sigma_{r-1}(f; X) \leq C_j (h_X)^j \|f^{(j)}\|_\infty.$$

Beweis:

1. Man konstruiert einen stetigen linearen Operator $Q_X : C[a,b] \to \mathcal{S}_{r-1}(X; [a,b])$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:
   (a) Q_X reproduziert Polynome vom Grad $r-1$, also $Q_X p = p$ für alle $p \in \mathcal{P}_{r-1}$.
   (b) Q_X ist *lokal* definiert, d.h. es existieren $M, c > 0$ mit $|Q_X f(x)| \leq M \|f\|_{\infty, [x - ch_X, x + ch_X]}$.

   Ein solcher Operator wird “Quasi-Interpolant” genannt.

2. Für jedes $f \in C^j[a,b]$ und jedes $0 \le k \le n$ gilt die Taylor-Formel

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{j-1} \frac{f^{(i)}(x_k)}{k!}(x-x_k)^i}_{=:\, T_{j-1}(x;x_k)} + \underbrace{\int_{x_k}^{x} f^{(j)}(t)\ \frac{(x-t)^{j-1}}{(j-1)!}\ dt}_{=:\, R(x;x_k)}.$$

Also gilt für alle $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\begin{aligned} |f(x) - Q_X f(x)| &\overset{(a)}{=} |R(x;x_k) - Q_X(R(\cdot;x_k))(x)| \\ &\overset{(b)}{\le} (1+M)\|R(\cdot;x_k)\|_{\infty,[x-ch_X, x+ch_X]}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung von $|R(y;x_k)|$ für $y \in I_k := [x_k - ch_X, x_{k+1} + ch_X]$ erfolgt durch

$$\begin{aligned} |R(y;x_k)| &\le \|f^{(j)}\|_{\infty,I_k} \left| \int_{x_k}^{y} \frac{(y-t)^{j-1}}{(j-1)!}\ dt \right| \\ &= \|f^{(j)}\|_{\infty,I_k} \frac{|y-x_k|^j}{j!} \\ &\le \|f^{(j)}\|_{\infty,I_k} \frac{((c+1)h_X)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Dies ergibt die Behauptung.

Unter geeigneten Voraussetzungen lässt sich die Approximationsordnung h_X^j sogar durch *Spline-Interpolation* erzielen.

Zunächst behandeln wir die eindeutige Lösbarkeit des Interpolationsproblems.

9.8 Satz von Schoenberg und Whitney

Die Knotenfolge X und der Splineraum $\mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b]) \subset C[a,b]$ mit $r \in \mathbb{N}$ seien gegeben wie in 9.4. Also ist $\dim \mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b]) = n+r$.

Zu gegebenen Interpolationsstellen $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+r} \le b$ ist die *Kollokationsmatrix*

$$C_X = (N_{r,k}(t_j))_{1 \le j \le n+r,\ -r+1 \le k \le n}$$

des Lagrange-Interpolationsproblems genau dann regulär, wenn die *Verschränktheitsbedingungen*

$$t_j \in (x_{j-r}, x_j), \qquad 2 \le j \le n+r-1,$$

sowie $t_1 \in [a, x_1)$ und $t_{n+r} \in (x_n, b]$ gelten. Diese sind äquivalent dazu, dass für die Diagonalelemente von C_X gilt $N_{j-r}(t_j) > 0$.

Beachte: Wir haben hier also die besondere Situation:

$$C_X \;\; \text{regulär} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{diag}(C_X) \;\; \text{regulär.}$$

9.9 Beispiel: Greville-Abszissen

Zu gegebener Knotenfolge X erfüllen die Mittelwerte

$$t_j := \frac{x_{j-r+1} + \cdots + x_{j-1}}{r-1}, \qquad 1 \le j \le n+r,$$

der **inneren** Knoten des B-Splines $N_{r,j-r}$ die Verschränktheitsbedingungen.

Umgekehrt: Zu gegebenen Interpolationsstellen $T = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+r}\}$, geradem r und $[a, b] = [t_1, t_{n+r}]$ wird durch

$$x_k = t_{k+r/2}, \qquad 1 \le k \le n,$$

eine Knotenfolge X (mit zusätzlichen Knoten $x_{-r+1} = \cdots = x_0 = a = t_1$ und $x_{n+1} = \cdots = x_{n+r} = b = t_{n+r}$) definiert, so dass die Verschränktheitsbedingungen gelten.
Speziell für $r = 4$: Wegen $X = T \setminus \{t_2, t_{n+r-1}\}$ sagt man, dass der zugehörige Interpolations-Spline die “not-a-knot”-Bedingung erfüllt (nach de Boor).

9.10 Eigenschaften der Kollokationsmatrix

Falls die Verschränktheitsbedingungen erfüllt sind, so ist die Kollokationsmatrix C_X eine Bandmatrix der Bandbreite $\leq r$.

C_X ist außerdem *total positiv*: Die Determinante jeder quadratischen Teilmatrix (aus beliebigen Zeilen $i_1 < \cdots < i_m$ und Spalten $j_1 < \cdots < j_m$) ist ≥ 0. Daraus folgt, dass die Inverse C_X^{-1} Einträge aufweist, deren Vorzeichen ein Schachbrettmuster zeigen.

Nun kommen wir zur Abschätzung der Güte der Interpolation. Der Interpolations-Operator

$$I_{X,T} : C[a,b] \to \mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])$$

ist durch r, die Knotenmenge X des Splineraums und die Stützstellenmenge T festgelegt. Die Operatornorm hängt eng mit der Norm der inversen Kollokationsmatrix C_X^{-1} zusammen; de Boor zeigte 1975

$$M_r \| C_X^{-1} \|_\infty \leq \| I_{X,T} \| \leq \| C_X^{-1} \|_\infty$$

mit der Konstanten M_r aus dem Stabilitätssatz in 9.5.
Die Norm von $I_{X,T}$ hat nun Auswirkung auf die Güte der Interpolation.

9.10 Güte der Interpolation

Für alle $f \in C[a,b]$ gilt

$$\|f - I_{X,T} f\|_\infty \leq (1 + \|I_{X,T}\|) \sigma_{r-1}(f;X) = (1 + \|I_{X,T}\|) \inf_{s \in \mathcal{S}_{r-1}(X;[a,b])} \|f - s\|.$$

Beispiele: Für die Wahl der Interpolationsstellen t_j als Greville-Abszissen konnte gezeigt werden:

- $r = 2 \implies \|I_{X,T}\| = 1$.
- $r = 3 \implies \|I_{X,T}\| \leq 18$ (Marsden, 1974, Bull. AMS),
- $r = 4 \implies \|I_{X,T}\| \leq 27$ (de Boor, 1975, J. Approx. Theory),

und zwar unabhängig von der Länge des Intervalls $I = [a, b]$ und der Knotenfolge X.

Weiterhin zeigten Morken (1984, PhD thesis) und Demko (1985, J. Approx. Theory):

- $r > 4$: es gibt Interpolations-Stellen T mit $\|I_{X,T}\| \leq M_r^{-1}$, wobei M_r die Konstante aus dem Stabilitätssatz in 9.5 ist.

Ob für die Greville-Abszissen und bel. $r > 4$ eine entsprechende Abschätzung existiert ist bis heute nicht bekannt (dies ist eine Vermutung aus de Boor (1975)).