Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. J. Stöckler
Dipl.-Wirt.-Math. T. Springer

Dortmund, 07.05.2013

Numerische Mathematik II

5. Übungsblatt

Aufgabe 14 Krylov-Räume

Zu einer positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ werden die *Krylov-Räume* $\mathcal{K}_0(A,v) \preceq \ldots \preceq \mathcal{K}_n(A,v) \preceq \mathbb{R}^n$ definiert als

$$\mathcal{K}_0(A,v) = \{0\}\,, \quad \mathcal{K}_j(A,v) = \operatorname{span}\{v, Av, \ldots, A^{j-1}v\}\,,\ j = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung $x^* = A^{-1}b$ des LGS $Ax = b$ die Eigenschaft $x^* \in \mathcal{K}_n(A,b)$ erfüllt.

Aufgabe 15 Orthogonalprojektion im CG-Verfahren

Für positiv definites $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist das Skalarprodukt $\langle x,y\rangle_A = x^TAy$ und die Norm $\|x\|_A = \sqrt{x^TAx}$ definiert. Weiter seien für $b \in \mathbb{R}^n$ die Lösung $x^* = A^{-1}b$ des LGS $Ax = b$ sowie das Funktional $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert als

$$F(y) \;=\; \frac{1}{2}\langle y,y\rangle_A - b^Ty\,.$$

a) Zeigen Sie

$$F(y) \;=\; \frac{1}{2}\left(\|y-x^*\|_A^2 - b^Tx^*\right)\,.$$

b) Laut Vorlesung bilden $r^{(0)}, \ldots, r^{(j-1)}$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ein Orthogonalsystem des Krylov-Raums $\mathcal{K}_j(A,g^{(0)})$. Zeigen Sie, dass die Orthogonalprojektion von $x^* - x^{(0)}$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ auf $\mathcal{K}_j(A,g^{(0)})$ gegeben ist durch

$$p^{(j-1)} \;=\; \sum_{\ell=0}^{j-1} \frac{\langle r^{(0)}, r^{(\ell)}\rangle}{\langle r^{(\ell)}, r^{(\ell)}\rangle_A}\, r^{(\ell)}\,,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

Aufgabe 16 Programmieraufgabe CG-Verfahren

Schreiben Sie ein Octave-/Matlab-Programm `x = conjGrad_<Name>(A,b)`, welches das Verfahren der *konjugierten Gradienten* realisiert. Schreiben Sie ein Skript, welches die Funktion jeweils für $b = (1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^n$ und die folgenden beiden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ testet:

a) `B = randn(10);   A = B'*diag(1:10)*B;`

b) `[Q,R] = qr(randn(10));   A = Q'*(10*eye(10)+diag(.1*randn(1,10)))*Q;`

Aufgabe 17 Bemerkung zum Störungssatz 9.5

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass zu jedem Eigenvektor $v_j \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ zum Eigenwert λ_j ein zugehöriger *Linkseigenvektor* $w_j \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ existiert mit $w_j^H A = \lambda_j w_j^H$ und $\langle v_j, w_k \rangle = 0$ für $j, k = 1, \ldots, n$, $j \neq k$.

b) Geben Sie die Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zur Inversen

$$S^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} w_1^H / \langle v_1, w_1 \rangle \\ \vdots \\ w_n^H / \langle v_n, w_n \rangle \end{pmatrix}$$

an und zeigen Sie, dass S die Matrix A diagonalisiert.

c) **Bonus (4 Punkte):** Es gelte $\|v_j\|_2 = \|w_j\|_2 = 1$ für $j = 1, \ldots, n$. Weisen Sie nach, dass $\|Sx\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$ für $x \in \mathbb{C}^n$ (Hinweis: Aufgabe 9, Numerik I) und zeigen Sie so, dass

$$\max_{j=1,\ldots,n} \frac{1}{|\langle v_j, w_j \rangle|} \;\leq\; \mathrm{cond}_2(S) \;\leq\; n \cdot \max_{j=1,\ldots,n} \frac{1}{|\langle v_j, w_j \rangle|} \,.$$

Ende der Abgabefrist: Dienstag, 14.05., 12:15 Uhr (Briefkasten 73)