

Lineare Algebra I

Übungsblatt 10

Aufgabe 37 (Pflichtabgabe)

Sei V ein \mathbb{K} -VR und $U \leq V$ ein Teilraum.

- Zeigen Sie, dass ein Teilraum $U' \leq V$ genau dann ein Repräsentantensystem von V/U ist, wenn $V = U \oplus U'$.
- Sei $W \leq V$ ein weiterer Teilraum mit $U \leq W$. Zeigen Sie, dass gilt: $W/U \leq V/U$.

Aufgabe 38 (Pflichtabgabe)

- Berechnen Sie für untenstehende reelle Matrizen die folgenden Ausdrücke, falls dies möglich ist: $A + B$, $B + C$, A^2 , B^2 , AB , BA , AC , $D + C$, CD , DC , BAC , ABD .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Seien $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$. Gelten die binomischen Formeln $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ und $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$?

Aufgabe 39

- Sei $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$. Zeigen Sie, dass $A + A^T$ symmetrisch und $A - A^T$ schiefsymmetrisch ist.
- Sei $\text{Sym}_{\mathbb{R}}(n, n)$ die Menge der symmetrischen $n \times n$ -Matrizen. Zeigen Sie, dass $\text{Sym}_{\mathbb{R}}(n, n)$ ein endlich-dimensionaler Teilraum von $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ ist und bestimmen Sie eine Basis.
- Zeigen Sie, dass $\text{Alt}_{\mathbb{R}}(n, n)$, die Menge der schiefsymmetrischen $n \times n$ -Matrizen, ebenfalls ein Teilraum von $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ ist. Geben Sie eine Basis an.
- Zeigen Sie, dass $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n) = \text{Sym}_{\mathbb{R}}(n, n) \oplus \text{Alt}_{\mathbb{R}}(n, n)$ eine direkte Summe ist und folgern Sie daraus, dass gilt: $\dim \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n) = n^2$.

Aufgabe 40

Es seien $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ mit $A \cdot (A \cdot B - B \cdot A) = (A \cdot B - B \cdot A) \cdot A$. Zeigen Sie, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A^n \cdot B - B \cdot A^n = nA^{n-1} \cdot (A \cdot B - B \cdot A).$$

Aufgabe 41

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die für eine beliebige Matrix $A \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, m)$ folgendes leistet:

- a) Die Funktion testet, ob A quadratisch ist.
- b) Wenn A quadratisch ist, testet die Funktion, ob A symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist.
- c) Wenn A quadratisch ist, gibt die Funktion die (eindeutige) Darstellung von A als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix an.