Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
Abgabe: bis 3.1.11, 14 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra I

Übungsblatt 11

Aufgabe 42 (Pflichtabgabe)

Sei $H := \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2,2) \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \right\}$. Zeigen Sie:

a) H bildet mit der für Matrizen erklärten Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{R}$–Vektorraum mit der Basis

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

b) H ist bzgl. der Multiplikation und Addition von Matrizen abgeschlossen. Tipp: Stellen Sie mit den Basiselementen E, I, J, K eine Verknüpfungstabelle für die Multiplikation auf.

c) Jedes von $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Element von H besitzt ein multiplikatives Inverses. Ist H ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 43 (Pflichtabgabe)

Sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit $\dim V = n$. Seien weiter $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig und $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(r,r)$. Definiere

$$w_j := \sum_{i=1}^{r} a_{ij} v_i, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $w_1, \ldots, w_r$ sind linear unabhängig,

(ii) A ist invertierbar.

Aufgabe 44

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n)$ mit $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Rang}\, A < n$.

b) Es gilt bereits $A^n = 0$.

Aufgabe 45

a) Prüfen Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & -3i \\ 4i & 5 & 1-i \\ 2-3i & 2i & 5 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Inverse mit Hilfe des Gauß–Algorithmus.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_K(2,2)$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$. Bestimmen Sie in diesem Fall die Inverse von A.

Aufgabe 46

a) Zeigen Sie, dass man Matrizen blockweise multiplizieren kann (Beweisskizze): Seien dazu

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

mit $A_{11}, B_{11} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(p,p)$ und $A_{22}, B_{22} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(q,q)$. Dann gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

b) Sei $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ wie in a) als Blockmatrix aufgefasst, d.h. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, mit $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(p,p)$ und $D \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(q,q)$. Seien weiter A und $D - CA^{-1}B$ invertierbar. Verwenden sie die blockweise Multiplikation aus a), um M^{-1} in Blockgestalt zu bestimmen.

c) Bestimmen Sie mit der Methode aus b) die Inverse von

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 47 Bestimmen Sie ohne Rechnung, ohne Taschenrechner und ohne sonstige Hilfsmittel den Rang der folgenden Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 12488 & 78499 & 12678 & 89466 \\ 17483 & 94328 & 41526 & 71964 \\ 78499 & 55486 & 17946 & 94563 \\ 64895 & 54863 & 166943 & 79428 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Erinnern Sie sich an alles, was wir mit bzw. aus ganzen Zahlen gemacht haben.