Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
Abgabe: bis 10.1.11, 14 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra I

Übungsblatt 12

Aufgabe 48 (Pflichtabgabe)

Es sei $V = \mathbb{R}[t]$ der Vektorraum der reellen Polynome.

a) Geben Sie die durch $t^j \mapsto t^{2j}$, $j \in \mathbb{N}_0$, definierte lineare Abbildung $F : V \to V$ an.

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} F$ und $\operatorname{Bild} F$.

c) Es sei $D : V \to V$ die (formale) Ableitung. Geben Sie eine lineare Abbildung $X : V \to V$ an mit $D \circ X = \mathrm{id}$. Warum gibt es keine lineare Abbildung $Y : V \to V$ mit $Y \circ D = \mathrm{id}$?

d) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} D^r$ und $\operatorname{Bild} D^r$ für $r \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 49 (Pflichtabgabe)

Sei $U \preccurlyeq \mathbb{R}^4$ mit $U = \operatorname{Span}\{(1, -2, 1, 0)^T, (2, 3, -1, 3)^T\}$.
Bestimmen Sie lineare Abbildungen $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $\operatorname{Kern} F = U$ und $\operatorname{Bild} G = U$. Geben Sie auch Matrizen A und B an, so dass $F(v) = Av$ und $G(v) = Bv$.

Aufgabe 50

Es sei E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ und G eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ mit $0 \in E$ und $0 \in G$.

a) Zeigen Sie: $\mathbb{R}^3 = E \oplus G \Leftrightarrow G \not\subset E$.

b) Sei nun $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$ und $v = v_E + v_G$ die eindeutige Darstellung von $v \in \mathbb{R}^3$.

   Zeigen Sie, dass durch $p_E(v) := v_E$ und $p_G(v) := v_G$ zwei lineare Abbildugen $p_E : \mathbb{R}^3 \to E$ und $p_G : \mathbb{R}^3 \to G$ definiert sind.

c) Was bedeuten p_E und p_G geometrisch? Wie kann man das Bild eines Vektors geometrisch bestimmen?