Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
Abgabe: bis 17.1.11, 14 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra I

Übungsblatt 13

Aufgabe 51 (Pflichtabgabe)

Es sei V ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit $\dim V = n$. Sei weiter $F \in \mathrm{Hom}(V)$.

a) Zeigen Sie: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, m minimal, und $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich 0, mit

$$0 = \sum_{i=0}^{m} c_i F^i. \tag{1}$$

Dabei sei $F^0 = \mathrm{id}$ und für $i > 0$ wie gewohnt F^i die i–fache Hintereinanderausführung von F.

b) Sei Gleichung (1) gegeben. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$F \text{ invertierbar} \iff c_0 \neq 0.$$

Aufgabe 52 (Pflichtabgabe)

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $\alpha := \frac{2\pi}{n}$. Weiter seien Matrizen

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie: $(D_\alpha)^n = S^2 = E_2$ und $S^{-1} D_\alpha S = (D_\alpha)^{-1}$.

b) Zeigen Sie: Die Menge

$$\mathcal{D}_n = \{(D_\alpha)^i, (D_\alpha)^i S \mid i = 0, \ldots, n-1\}$$

ist (bzgl. Matrizenmultiplikation) eine Gruppe mit $2n$ Elementen.

c) Seien $F_\alpha, G \in \mathrm{Hom}(V)$ mit $F_\alpha(v) := D_\alpha v$ und $G(v) := Sv$. Wie kann man F_α und G geometrisch interpretieren? Tipp: Betrachten Sie v in Polarkoordinatendarstellung.

Aufgabe 53

Ein $F \in \operatorname{Hom}(V)$ mit $F^2 = F$ heißt <u>Projektion</u>. Seien $F, G \in \operatorname{Hom}(V)$ Projektionen. Zeigen Sie:

a) Ist $F + G$ eine Projektion und $\operatorname{Char} \mathbb{K} \neq 2$, so gilt $F \circ G = G \circ F = 0$.

b) Ist $F \circ G = G \circ F$, so ist $F \circ G$ die Projektion mit

$$\operatorname{Kern}(F \circ G) = \operatorname{Kern} F + \operatorname{Kern} G \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild}(F \circ G) = \operatorname{Bild} F \cap \operatorname{Bild} G.$$

c) Ist $F \circ G = G \circ F$, so ist $H := F + G - (F \circ G)$ die Projektion mit

$$\operatorname{Kern} H = \operatorname{Kern} F \cap \operatorname{Kern} G \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} H = \operatorname{Bild} F + \operatorname{Bild} G.$$

Aufgabe 54 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Sei weiter

$$F : \begin{cases} \mathcal{P}_n & \to & \mathbb{R}^2 \\ f & \mapsto & (f(a), f'(a)). \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} F$ und zeigen Sie, dass F surjektiv ist (F linear darf vorausgesetzt werden).