

Lineare Algebra I

Übungsblatt 15

Hinweis zur Klausurzulassung:

Wer inklusive Blatt 14 eine Quote von 50% erreicht hat, erhält die Studienleistung gegen Ende der Woche in BOSS eingetragen. Alle anderen haben mit diesem Blatt 15 noch die Möglichkeit, die Studienleistung zu erwerben. Diese wird dann im Laufe der nächsten Woche eingetragen.

Wenn Blatt 15 für die Studienleistung zählt, gilt: Das Soll erhöht sich um 4 Punkte, da zwei Aufgaben mehr zu bearbeiten sind. Die Zahl der möglichen Punkte erhöht sich jedoch um 16, da in allen vier Aufgaben jeweils 4 Punkte erreicht werden können.

Aufgabe 59 (Pflichtabgabe)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie $\det A$ mit Laplace-Entwicklung und mit Sarrus.
- Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert die Inverse A^{-1} ? Bestimmen Sie für diese a die Inverse mit Hilfe der Adjunkten $A^\#$.

Aufgabe 60 (Pflichtabgabe)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$. Sei weiter

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & a & b & & \\ & & & b & a & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & \dots & & \dots & 0 & a \end{pmatrix},$$

wobei $A \in \text{Mat}(2m, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie $\det A$.

Aufgabe 61 (+4 Punkte)

Für $n \geq 2$ sei $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie für die Adjunkte A^\sharp die folgenden Aussagen zum Rang:

- a) $\text{Rang } A = n \Leftrightarrow \text{Rang } A^\sharp = n$.
- b) $\text{Rang } A = n - 1 \Leftrightarrow \text{Rang } A^\sharp = 1$.
- c) $\text{Rang } A \leq n - 2 \Leftrightarrow \text{Rang } A^\sharp = 0$.

Zeigen Sie:

d) $(A^\sharp)^\sharp = (\det A)^{n-2}A$.

Aufgabe 62 (+4 Punkte)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Definiere $A := E_n + vw^T$.

- a) Zeigen Sie: Ist $w^T v = -1$, so ist A singulär.
- b) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $B := E_n + \alpha vw^T$ die Inverse von A ist.
- c) Bestimmen Sie die Determinante von A .