

Lineare Algebra I

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (Pflichtabgabe)

Auf einer Forschungsreise zu einem Bergvolk mit seltsamen Bräuchen treffen der Professor und sein Assistent die drei Repräsentanten des Volkes: Häuptling, Mediziner und Koch. Es ist Brauch, dem Häuptling das Gastgeschenk und dem Mediziner einige Heilkräuter zu überreichen. Um zu erkennen, wer wer ist, befragt der Professor die drei Repräsentanten. Es ist bekannt, dass der Mediziner immer die Wahrheit sagt, der Häuptling stets lügt und der Koch mal die Wahrheit sagt und mal lügt.

Professor: „Wer seid Ihr?“

Erster: „Der Dritte ist der Häuptling.“

Zweiter: „Der Erste ist der Mediziner.“

Dritter: „Ich bin der Koch.“

Der Assistent schaut verwirrt von einem zum anderen, aber der Professor beruhigt ihn: „Es ist doch klar, wer Häuptling und wer Mediziner ist.“
Und zwar...?

Aufgabe 5 (Pflichtabgabe)

Es sei Ω eine Menge und $A, B, C \subseteq \Omega$. Beweisen Sie für die symmetrische Differenz von $A \Delta B$, definiert durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

die folgenden Behauptungen:

- $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$,
- $(A \Delta B) = A \iff B = \emptyset$,
- Ist $A \subseteq \overline{B}$, so gilt: $A \Delta B = A \cup B$.

Aufgabe 6

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mit vollständiger Induktion:

- Für $n \geq 1$ gilt: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$.
- Es seien $1 \leq m \leq n$ und M eine Menge mit $|M| = n$.
Dann besitzt M genau $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ Teilmengen mit m Elementen.

Aufgabe 7

Zwei Bauern verkaufen ihre x Kühe in der Stadt für je x Euro. Aus dem Erlös erwerben sie eine ungerade Anzahl von Kälbern zu je 12 Euro. Der Rest des Geldes reicht genau für ein Schaf. Dem Bauern, der beim Teilen das Schaf erhält, schenkt der andere als Ausgleich noch sein Taschenmesser. Was kostet das Taschenmesser?

Hinweis: Erinnern Sie sich an geeigneter Stelle an den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Wenn Sie den Preis des Taschenmessers auf zwei Möglichkeiten eingegrenzt haben, dürfen Sie ruhigen Gewissens aufhören und auf die Globalübung warten.

Für die als Pflichtabgabe gekennzeichneten Aufgaben gibt es jeweils bis zu 4 Punkte. Für die Studienleistung muss die Hälfte der Punkte erreicht werden. Gemeinsame Bearbeitungen der Pflichtaufgaben sind nicht zugelassen.

Die restlichen Aufgaben können in 2er-Gruppen abgegeben werden. Für sie gibt es keine Punkte.