Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
Abgabe: bis 25.10.10, 14 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra I

Übungsblatt 3

Korrektur: Für alle Aufgaben sind generell Abgaben in 3er–Gruppen zugelassen.

Aufgabe 8 (Pflichtabgabe)
Es seien L, M, N Mengen und $f : L \to M$ sowie $g : M \to N$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Zum Widerlegen finden Sie ein Beispiel, für das die Aussage nicht gilt):

a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

c) f und g sind genau dann injektiv, wenn $g \circ f$ injektiv ist.

d) f und g sind genau dann surjektiv, wenn $g \circ f$ surjektiv ist.

Aufgabe 9 (Pflichtabgabe)
Es seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Sei $L \subseteq N$ eine Teilmenge. Gilt stets $f(f^{-1}(L)) \subseteq L$? Unter welcher Bedingung gilt Gleichheit?

b) Gilt $f^{-1}(\{f(a)\}) = \{a\}$ für alle $a \in M$? Wenn nicht, wann gilt es?

Aufgabe 10
Es seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Für $K, L \subseteq N$ gilt:

a) $f^{-1}(K \cup L) = f^{-1}(K) \cup f^{-1}(L)$.

b) $f^{-1}(K \cap L) = f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L)$.

Für $A, B \subseteq M$ gilt:

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

d) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Zeigen Sie die Aussagen a) und d) und geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die umgekehrte Inklusion in d) nicht gilt.

Aufgabe 11
Es sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Zeigen Sie, dass es keine bijektive Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$ gibt. Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass M und $\mathcal{P}(M)$ nicht gleichmächtig sind.
Tipp: Betrachten Sie die Menge $L := \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$.