Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
Abgabe: bis 02.11.10, 14 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra I

Übungsblatt 4

Aufgabe 12 (Pflichtabgabe)

Es seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : N \to M$ heißt Linksinverse von f, wenn gilt: $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Analog heißt eine Abbildung $h : N \to M$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_N$ Rechtsinverse von f. Zeigen Sie:

a) f besitzt eine Linksinverse $g \iff f$ ist injektiv.

b) f besitzt eine Rechtsinverse $h \iff f$ ist surjektiv.

c) Die Linksinverse g existiert und ist eindeutig $\iff f$ ist bijektiv.
(Ohne Beweis: Es gilt auch die analoge Aussage für eine eindeutige Rechtsinverse h.)

d) Besitzt f eine Linksinverse g und eine Rechtsinverse h, so gilt: $g = h$.

Aufgabe 13 (Pflichtabgabe)

a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $ab \neq 0$. Zeigen Sie:
Die Gleichung $ax + by = c$ besitzt genau dann ganzzahlige Lösungen x und y, wenn c ein Vielfaches von $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist.

b) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ mit $ad - bc = 1$. Zeigen Sie, dass der Bruch $\frac{a+b}{c+d}$ nicht gekürzt werden kann.

Aufgabe 14

Bestimmen Sie den ggT für folgende Zahlen:

a) $m = 329423$ und $n = 163163$,

b) $m = 100000001$ und $n = 123456789$.

Aufgabe 15

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$, wobei $c = \mathrm{ggT}(a, b)$.

b) $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, wobei $d = \mathrm{kgV}(a, b) := \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a,b)}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist .

.