Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

WiSe 2010/11
Abgabe: bis 08.11.10, 14 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra I

Übungsblatt 5

Aufgabe 16 (Pflichtabgabe)

Sei $M = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und eine Abbildung

$$* : \begin{cases} M \times M & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a + b + ab. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $*$ eine Verknüpfung auf M ist.

b) Zeigen Sie, dass $(M, *)$ eine Gruppe ist. Ist sie abelsch?

c) Lösen Sie in $(M, *)$ die Gleichung:

$$2 * x * 3 = 12.$$

Aufgabe 17 (Pflichtabgabe)

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq H \subseteq G$ eine Teilmenge von G. Zeigen Sie:

a) H ist genau dann eine Untergruppe, wenn für alle $a, b \in H$ gilt: $ab^{-1} \in H$.

b) Sei nun G endlich. Dann gilt: H ist genau dann eine Untergruppe, wenn für alle $a, b \in H$ auch $ab \in H$.

c) Sei $(G', \odot)$ eine weitere Gruppe und $f : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann sind die folgenden beiden Teilmengen Untergruppen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern} f &:= \left\{ g \in G \;\middle|\; f(g) = e_{G'} \right\} \subseteq G, \\ \operatorname{Bild} f &:= \left\{ g' \in G' \;\middle|\; \exists\, g \in G : f(g) = g' \right\} \subseteq G'. \end{aligned}$$

Aufgabe 18

a) Es sei $M = \{a, b, c, d\}$. Von einer Verknüpfung $\odot : M \times M \to M$ ist die Verknüpfungstafel nur unvollständig bekannt:

$\odot$	a	b	c	d
a	b			
b		b		
c			b	
d				b

Zeigen Sie, dass es genau eine Verknüpfung $\odot$ gibt, so dass $(M, \odot)$ eine Gruppe mit vier Elementen ist.
Tipp: Kümmern Sie sich um die Assoziativität als Letztes und klären Sie erst: Welches ist das neutrale Element? Welche Elemente sind invers zueinander? Ist die Gruppe abelsch?

b) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Weiter gelte $a \cdot a = e$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie: Dann ist G abelsch.

Aufgabe 19

Es seien $\sigma, \tau \in S_6$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $(\sigma \circ \tau)^{-1}$, $(\tau \circ \sigma)^{-1}$, $\sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$ und σ^{1203}.